



# Escola de Camins

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports

UPC BARCELONATECH

REFUERZO A CORTANTE MEDIANTE LA DISPOSICION DE  
ARMADURA LONGITUDINAL A FLEXION EN VIGAS DE  
HORMIGON ARMADO

Trabajo realizado por:

David Eduardo Arriaga Marte

Dirigido por: Antonio

Marí Bernat

Máster en:

Ingeniería Estructural y de la Construcción

Barcelona, Febrero de 2019

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental.

TRABAJO FINAL DE MÁSTER



**Escola de Camins**  
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports  
UPC BARCELONATECH

## TESIS DE MÁSTER

Máster

MÁSTER DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE LA  
CONSTRUCCIÓN

Título

“REFUERZO A CORTANTE MEDIANTE LA DISPOSICION  
DE ARMADURA LONGITUDINAL A FLEXION EN VIGAS DE  
HORMIGON ARMADO”

Autor

DAVID EDUARDO ARRIAGA MARTE

Tutor

ANTONIO MARI BERNAT

Intensificación

TECNOLOGÍA DE ESTRUCTURAS

Fecha

BARCELONA, FEBRERO 2019

## AGRADECIMIENTOS

Para la realización de este trabajo final de máster y los estudios en general, he contado con el apoyo incondicional de muchas personas. Todos juntos de una forma u otra, han contribuido para hoy lograr lo que antes solo era concebido como un sueño distante y difícil de alcanzar.

No hubiera sido posible sin la ayuda incondicional del profesor Antonio Mari, que me ha guiado en todo momento. Siempre buscando despertar en mi persona y otros compañeros de máster, el pensamiento crítico, claro y objetivo para enfrentar de manera incansable y sin titubeo, los diferentes problemas que encontremos durante el ejercicio de la profesión.

A la profesora Noemí Duarte, por su paciencia y diligente ayuda con las explicaciones en el manejo del Software de Elementos Finitos midas-FEA. Este software fue de inmensa ayuda para modelar los elementos sometidos a cargas y posterior verificación de los cálculos realizados.

Al profesor Jesús Bairán por su apoyo, las horas dedicadas a la aclaración oportuna de dudas, tanto a mi persona como a mis otros compañeros durante todos nuestros cursos académicos del máster cursado.

Gracias al apoyo de mi familia, que siempre han confiado en mí y servido de soporte, para afrontar todo lo que me he propuesto en la vida,

A todos, muchas gracias.

## RESUMEN

El tratamiento de la resistencia de cortante en la mayoría de los códigos de diseño de hormigón estructural, tiene un carácter conservador y es, en algunos aspectos, el resultado de trabajos experimentales o ajustes empíricos, sin un modelo mecánico que soporte las expresiones de diseño y aporte información sobre la física del problema, aspecto muy importante de cara al diseño. Por esta razón, estas formulaciones, son específicas y restrictivas en su aplicación.

Muchas estructuras necesitan ser reforzadas, bien por deterioro de sus materiales, bien por producirse un cambio de uso o de las cargas de diseño durante su vida útil. El refuerzo debe plantearse conociendo a fondo los mecanismos resistentes a cortante del hormigón armado. De hecho, las teorías clásicas consideran que la contribución del hormigón a la resistencia a cortante de vigas de HA esta aportada fundamentalmente por el alma. Por ello, algunas formas de refuerzo, además de incorporar cercos u otra armadura transversal, proponen aumentar el alma. Sin embargo, recientemente se han desarrollado modelos de resistencia a cortante, como el CCCM, basados en la contribución de la cabeza comprimida que han mostrado una mejor aproximación a los ensayos y dan respuesta a muchos de los aspectos del comportamiento a cortante. Estos modelos permiten, por lo tanto, desarrollar una forma de refuerzo a cortante alternativa y complementaria a las formas clásicas.

En esta tesis de Master se profundiza en el conocimiento de la resistencia a esfuerzo cortante de vigas, en cuantificar la contribución del acero longitudinal a la misma y en proponer una forma de refuerzo alternativa basada en estos conceptos. De hecho, aumentar la cuantía longitudinal da lugar a una mayor cabeza comprimida, y por tanto, a un mayor  $V_c$ . Para poder lograr este objetivo se ha hecho una extensa revisión del estado de conocimiento en la resistencia a cortante de vigas, así como simulaciones computacionales mediante el programa Midas-FEA en régimen no lineal, trazando la respuesta estructural bajo carga creciente hasta rotura. Los resultados obtenidos de las simulaciones fueron analizados para comprobar la adecuación del método de cálculo elegido (CCCM), y estudiar la influencia o participación en la resistencia a cortante aportada por cada elemento (hormigón, armadura transversal, armadura longitudinal) en una viga de hormigón armado.

Se analiza una viga de referencia (v1) que debe ser reforzada por un aumento de las cargas, se diseña dos tipos de refuerzo, mediante aumento de cercos (v2) o de armadura de flexión (v3), ambos utilizando el CCCM y la Instrucción EHE-08. Se simula numéricamente la respuesta estructural hasta rotura mostrando que en ambos casos se puede aumentar la resistencia a cortante para resistir el incremento de cargas, siendo mucho más fácil con refuerzo longitudinal. La carga última obtenida numéricamente es más parecida a la predicción del CCCM (error medio 5%), siendo la de EHE-08 más conservadora.

Finalmente se extraen conclusiones derivadas del trabajo y se abren perspectivas para futuras investigaciones.

## CONTENIDO

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>7</b>
1.1 Motivación.....	7
1.2 Objetivos: .....	8
1.3 Contenido del Documento .....	9
<b>2. ESTADO DEL CONOCIMIENTO .....</b>	<b>10</b>
2.1 Factores Influyentes en la Resistencia a Cortante: .....	10
2.1.1 Tensiones de corte en el hormigón no fisurado: .....	10
2.1.2 Cortante en la superficie de fisura, conocido como cortante-fricción o engranaje de áridos: .....	10
2.1.3 Tensiones residuales de tracción en las fisuras: .....	15
2.1.4 Efecto pasador .....	16
2.1.5 Efecto Arco .....	18
2.2 Parámetros Influyentes sobre la resistencia a cortante de elementos lineales sin acero transversal. ....	20
2.2.1 Resistencia a compresión del hormigón .....	20
2.2.2 Armadura longitudinal .....	21
2.2.3 Efecto tamaño .....	22
2.2.4 Efecto del pretensado .....	24
2.2.5 Esbeltez de la pieza, relación $a/d$ .....	25
2.3 Modelos Teóricos Sin Armadura Transversal.....	26
2.3.1 Modelos de dientes .....	26
2.3.2 Modelos mecánicos basados en la resistencia a cortante en el bloque de compresiones de elementos a flexión:.....	27
2.3.3 Modelos de bielas y tirantes .....	28
2.4 Modelos Teóricos con Armadura Transversal.....	29
2.4.1 Modelos de Celosía.....	29
2.4.1 Teoría modificada del campo de compresiones (MCFT) .....	31
2.4.2 Compression Chord Capacity Model (CCCM), Basado en el “Multi-Action Shear Model (MASM)” .....	36
2.5 Normativa.....	47

2.5.1	Diseño a Cortante por Instrucción Española EHE-08.....	47
2.5.2	Comparación de códigos de diseño .....	51
<b>3.</b>	<b>REFUERZO DE RESISTENCIA A CORTANTE MEDIANTE INCREMENTO DE ARMADURA</b>	
	<b>LONGITUDINAL.....</b>	<b>56</b>
3.1	Introducción .....	56
3.2	Descripción de las vigas estudiadas y de su respuesta frente a diversos refuerzos.....	57
3.3	Refuerzo a Cortante empleando el método CCCM.....	61
3.3.1	Diseño Ante Solicitaciones de Uso Normales. ....	61
3.3.2	Cambio de Uso: Adicionando Barras Acero a la Sección, es decir $\Delta A_{st}$ si $\Delta A_{sc}=0$ . ....	63
3.3.3	Cambio de Uso: Colocando Chapa Metálica Longitudinal adicional Como Contribución al Refuerzo. $\Delta A_{st} + \Delta A_{sc}=\Delta V+V$ .....	64
3.4	Predicción de la resistencia a cortante de las vigas mediante EHE-08. ....	69
3.5	Simulación Numérica: Midas FEA.....	73
3.6	Comparativa Numérico-Experimental .....	77
3.7	Resumen Resultados Modelación Numérica Midas-FEA .....	77
<b>4.</b>	<b>CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO.....</b>	<b>85</b>
4.1	Conclusiones generales.....	85
4.2	Recomendaciones para futuras líneas de investigación. ....	86
<b>5.</b>	<b>ANEJOS.....</b>	<b>87</b>
<b>6.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>90</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Falla de una viga sin refuerzo a cortante. ....	7
Figura 2 Falla repentina a cortante de paso a desnivel “De la Concorde” Quebec, Canadá 2006. ....	7
Figura 3 Fuerzas internas en una viga fisurada sin armadura a cortante.....	10
Figura 4 Ensayos de acoplamiento de áridos: A) Influencia de la abertura de fisura. ....	11
Figura 5 Ensayos de acoplamiento de áridos: B) Influencia de la resistencia del hormigón. C) Dimensión de bloque de hormigón ensayado y modo de aplicación de la carga. Adaptado de Fenwick y Paulay. ....	12
Figura 6 Parámetros de Desplazamiento en una fisura. H. Taylor. ....	13
Figura 7 a) Área de contacto durante el deslizamiento; b) Tensión-deformación de la matriz rígida-plástica; c) Estructura observada del plano de fisura; d) Área de contacto entre un árido y la matriz, tensiones en el mismo. ....	14
Figura 8 Respuesta de una probeta ensayada a tracción simple. Adaptado de Gopalaratnam y Shah.....	15
Figura 9 Mecanismo de acción de efecto pasador. ....	16
Figura 10 Esquema de las vigas ensayadas por Krefeld y Thruston. ....	16
Figura 11 Ensayo tipo 1 para evaluar el efecto pasador de la campaña de Fenwick y Paulay.....	17
Figura 12 Ensayo tipo 2 para evaluar el efecto pasador de la campaña de Fenwick y Paulay.....	17
Figura 13 Efecto arco en un ensayo con cargas puntuales y en un ensayo con carga repartida. ....	18
Figura 14 Resistencias a cortante observadas por Kani y evaluación del modelo resistente realizado por Collins y Mitchell en 1991.....	19
Figura 15 Relación entre la resistencia a cortante y la cuantía de refuerzo longitudinal, de diferentes predicciones de base empírica. ....	21
Figura 16 Fotografía del colapso en almacén de las fuerzas aéreas en Shelby, Ohio. ....	22
Figura 17 Influencia del canto del elemento y el tamaño máximo de árido en la tensión nominal de rotura a cortante.....	23
Figura 18 Influencia del cociente $a/d$ en la resistencia a cortante. Análisis mediante RNA comparado con la Instrucción EHE-98 y el Código Modelo de 1990.....	26
Figura 19 Modelo de Peine de Kani para vigas que fallan a cortante. ....	26
Figura 20 Viga Corta: Campo de tensiones, modelo de bielas y tirantes.....	28
Figura 21 Modelo de bielas y tirantes por Al-Nalhawi and Wight en 199252 para vigas con $a/d < 2$ .....	28
Figura 22 Modelo de bielas y tirantes por Al-Nalhawi and Wight en 199252 para vigas con $a/d > 2$ . ....	29
Figura 23 Esquemas de la analogía de la celosía de Ritter y Morsch .....	29
Figura 24 Bielas y tirantes propuesto por Muttoni y Schwartz .....	31
Figura 25 Diferencia entre CFT y MCFT .....	31
Figura 26 Ensayos de paneles: Configuración de gatos y barras de conexión para aplicar un cortante a panel de hormigón armado y a la derecha el panel después de la rotura . ....	32

Figura 27 Circulo de Tensiones de Mohr para tensiones locales biaxiales en fisura de miembros sin refuerzo. ....	33
Figura 28 Ecuaciones de la MCFT, E. Bentz, F. Vecchio, and M. Collins. ....	34
Figura 29 Envolvente de falla bajo un estado de tensión biaxial, por Kupfer. ....	36
Figura 30 Distribución cualitativa de las tensiones de cortante ante una falla y distribución de cortantes inminentes. ....	38
Figura 31 Componentes de la resistencia a cortante en una viga de hormigón fisurada .....	43
Figura 32 Hipótesis de distribución de tensiones en la cabeza de compresión .....	44
Figura 33 Verificación del modelo propuesto para las diferentes bases de datos. Valores medios y coeficiente de Variación en los resultados. %.....	52
Figura 34 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Efecto Tamaño en Vigas sin Estribos .....	55
Figura 35 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Efecto tamaño en Vigas sin Estribos.....	55
Figura 36 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Influencia del índice de confinamiento de estribos. ....	55
Figura 37 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Influencia del índice de confinamiento de estribos. ....	55
Figura 38 Caso de Estudio: Sección Longitudinal de la Viga .....	58
Figura 39 Caso de Estudio: Sección Transversal del Elemento.....	58
Figura 40 Diagrama de Momentos Caso 1.....	58
Figura 41 Diagrama de Esfuerzo Cortante Caso 1 .....	59
Figura 42 Diagrama de Momentos Caso 2.....	59
Figura 43 Diagrama de Esfuerzo Cortante Caso 2 .....	59
Figura 44 Detalle de Refuerzo Caso 1 .....	62
Figura 45 Detalle de Refuerzo Caso 2 .....	63
Figura 46 Detalle de Refuerzo Caso 3 .....	68
Figura 47 Tipo de Elemento utilizado en Midas-FEA .....	74
Figura 48 Método de Newton-Raphson .....	76
Figura 49 Curvas Carga Desplazamiento de Vigas Simuladas.....	79
Figura 50 Curva Carga Desplazamiento de Vigas V1 .....	80
Figura 51 Curva Carga Desplazamiento de Vigas V2 .....	80
Figura 52 Curva Carga Desplazamiento de Viga V3 .....	80



## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1 Motivación

Las deficiencias en el diseño a cortante de estructuras de hormigón son inherentemente más peligrosas que las deficiencias en el diseño a flexión. Esto debido a que las fallas por cortante pueden ocurrir sin ninguna advertencia y posibilidad de redistribución de fuerzas internas.

Aunque el diseño preciso de la capacidad a cortante de una estructura en hormigón es muy importante para la seguridad pública, las técnicas tradicionales disponibles para esta realizar esta tarea todavía hoy están abiertas a discusión. Para determinar la capacidad a flexión utilizamos la metodología general de “teoría de secciones planas”. No obstante, para encontrar la resistencia a cortante normalmente nos basamos en ecuaciones empíricas restrictivas cuya aplicación y precisión son cuestionables.

Una estructura de hormigón bien diseñada, al ser sometida a grandes sobrecargas, debería fallar a flexión y no a cortante. Dichas estructuras son resistentes, nos dan un amplio margen de alerta cuando se aproximan a la falla y normalmente son capaces de resistir sorpresivamente grandes cargas.

A diferencia de las fallas a flexión, las fallas a cortante son relativamente frágiles y, particularmente en miembros con insuficientes estribos, pueden ocurrir sin advertencia alguna. Debido a esto, el principal objetivo del diseño a cortante es identificar donde el refuerzo a cortante es requerido y cuanto de este refuerzo debe ser previsto para prevenir dichas fallas.

El refuerzo a cortante se acopla junto al de flexión y de compresión y se asegura que ambos lados actúan como una unidad. Las fallas a cortante involucran el desacople de esta unión y normalmente están acompañadas y de la abertura de una fisura diagonal mayor. [Ver figuras 1 y 2].



*Figura 1 Falla de una viga sin refuerzo a cortante.<sup>1</sup>*



*Figura 2 Falla repentina a cortante de paso a desnivel “De la Concorde” Quebec, Canadá 2006.<sup>1</sup>*

Hoy en día durante la vida útil de nuestras estructuras, nos vemos en la necesidad de reforzarlas por diversas razones; Una reparación, un cambio de uso diferente al que fueron proyectadas, el deterioro, son algunos de los escenarios en donde debemos garantizar que los elementos que componen la estructura sean capaces de resistir los nuevos esfuerzos a los que son sometidos.

Es debido a estas razones que nos vemos en la necesidad de estudiar los mecanismos resistentes a cortante del hormigón armado para, conociendo a fondo los mecanismos, poder ofrecer métodos de refuerzo que puedan garantizar la resistencia con las nuevas prestaciones requeridas.

## 1.2 Objetivos:

Los objetivos de este Trabajo Final de Máster son:

1. Con la ayuda de la metodología del Compresión Chord Capacity Model (CCCM), cuantificar a detalle el aporte por el acero longitudinal a la resistencia a cortante en una viga de hormigón armado.
2. Proponer una metodología simple de refuerzo adicional a cortante y flexión, para estructuras que por diferentes razones se ven sometidas a un cambio en sus prestaciones de servicio.
3. Verificar los resultados de estos cálculos en los aportes a la resistencia a cortante de los diferentes elementos y el comportamiento del diseño estructural, con la ayuda de software de simulación de Elementos Finitos: MIDAS-FEA.

### 1.3 Contenido del Documento

El Capítulo 1 corresponde a la introducción. Aquí presentamos un breve panorama de la actualidad sobre el diseño a cortante en vigas de hormigón armado. Planteamos, además, la problemática en la incertidumbre de las estrategias adoptadas para el diseño de refuerzo a cortante y la necesidad que se presenta a la hora de tener que reforzar una viga de hormigón armado por diversas razones. Visto esto, procedemos a trazar los objetivos a cumplir en este trabajo de tesis.

El Capítulo 2 corresponde al estado del conocimiento. Se identifican los factores y parámetros influyentes en la resistencia a cortante en un elemento viga de hormigón armado, así como los diferentes modelos teóricos de diseño y normativa para luego compararlos, y elegir el método de cálculo más apegado a la realidad.

El Capítulo 3 corresponde a la aplicación del modelo de cálculo Compression Chord Capacity Model (CCCM) a un elemento viga de hormigón armado, el cual necesita un aumento en su resistencia a esfuerzos debido a cambios en prestaciones. A la vez, se compara con otras metodologías de cálculo para reafirmar.

Luego de realizado los cálculos y con la ayuda del software de elementos finitos “midas-FEM”, procedemos a estudiar nuestro modelo de refuerzo y verificar las diferentes contribuciones de los elementos que aportan resistencia a cortante en una sección de viga de hormigón armado.

Para lograr esto se estudian y modelan 3 diferentes situaciones de carga de una viga de hormigón armado.

En el Capítulo 4 se desarrollan las conclusiones principales a las que hemos podido alcanzar, a partir de los conceptos desarrollados y resultados obtenidos. Además, se incluyen las recomendaciones para futuras líneas de investigación.

## 2. ESTADO DEL CONOCIMIENTO

### 2.1 Factores Influyentes en la Resistencia a Cortante:

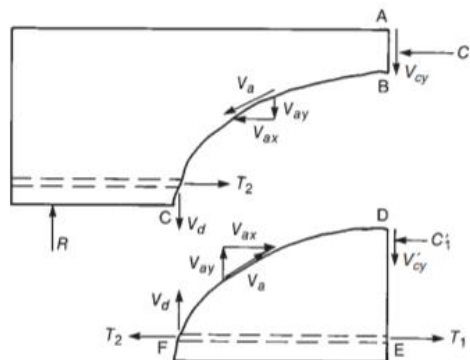
Los esfuerzos cortantes son los esfuerzos que actúan de manera tangencial a la superficie del material, o perpendicular al eje longitudinal del elemento.<sup>2</sup>

En el informe del ACI Committee 445 de 1998<sup>3</sup> se identifican los siguientes cinco mecanismos principales de resistencia a cortante en un elemento de hormigón:

1. Tensiones de corte en el hormigón no fisurado
2. Cortante transferido en la superficie de la fisura, conocido como cortante-fricción o engranaje de áridos
3. Efecto pasador de la armadura longitudinal
4. Efecto Arco EA
5. Tensiones de tracción residuales transmitidas directamente a través de las fisuras.

#### 2.1.1 Tensiones de corte en el hormigón no fisurado:

En un elemento no fisurado, el cortante se transfiere a por las tensiones de compresión y tracción, de acuerdo con las ecuaciones de elasticidad.



*Figura 3 Fuerzas internas en una viga fisurada sin armadura a cortante.<sup>4</sup>*

#### 2.1.2 Cortante en la superficie de fisura, conocido como cortante-fricción o engranaje de áridos:

En el hormigón la capacidad de las fisuras para transmitir tensiones rasantes es fundamental. Las fisuras que aparecen debido a los efectos por la flexión del elemento, y suelen estar sometidas a esfuerzos cortantes. De acuerdo a K Reineck<sup>5</sup>, J. Walraven<sup>6</sup>, R. Fenwich y T. Paulay<sup>7</sup>, la resistencia a cortante de los elementos sin armadura a transversal, recae en gran parte en la capacidad de transmitir tensiones en las superficies de las fisuras.

El que se puedan transmitir tensiones rasantes entre las dos caras opuestas de una fisura en hormigón, es debido a que al deslizar una sobre otra, se produce un encaje o acople de áridos, esto ocurre debido a que la fisura se produce en la matriz de cemento (Warlaven en 1981)<sup>6</sup>. Debido a que la fisura no es totalmente continua, también es capaz de soportar en menor medida tensiones residuales de tracción.

Cortante-fricción:

Fenwick y Paulay<sup>7</sup> estudiaron los diferentes mecanismos resistentes a cortante, para desarrollar el modelo de “dientes de peine” planteado por Kani a principios de los 1960<sup>8</sup>. Los factores contemplados en este estudio fueron:

- Deslizamiento entre las fisuras  $\Delta_s$ .
- Abertura de fisuras ( $w$ ).
- Resistencia del hormigón a compresión  $f'_c$ .
- Área de contacto.

Para establecer una relación entre el deslizamiento de las caras de la fisura, y la resistencia a corte de la misma, ensayaron una gran cantidad de bloques de hormigón. La fisura de abertura constante, se forma a través del rebaje de un cuarto de pulgada del propio bloque de hormigón.

En la primera serie de ensayos la resistencia a compresión del hormigón se mantuvo constante, variando solo el ancho de fisura. El promedio de las curvas obtenidas en cada ensayo se presenta en la figura 4A. En esta grafica podemos observar la reducción drástica de cortante que se puede transmitir por el engranamiento de áridos, cuando se aumenta el ancho de fisura. La segunda serie de ensayos (Figura 5B) reveló la influencia de la resistencia a compresión del hormigón, en donde el ancho de fisura  $w$  se mantiene constante a 0.19mm.

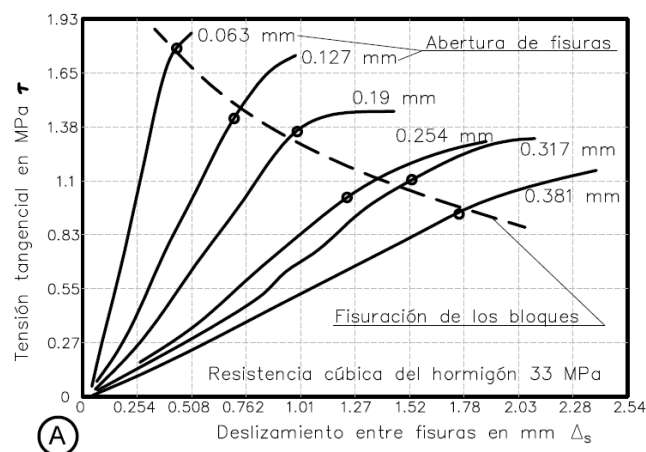


Figura 4 Ensayos de acoplamiento de áridos: A) Influencia de la abertura de fisura. <sup>7</sup>

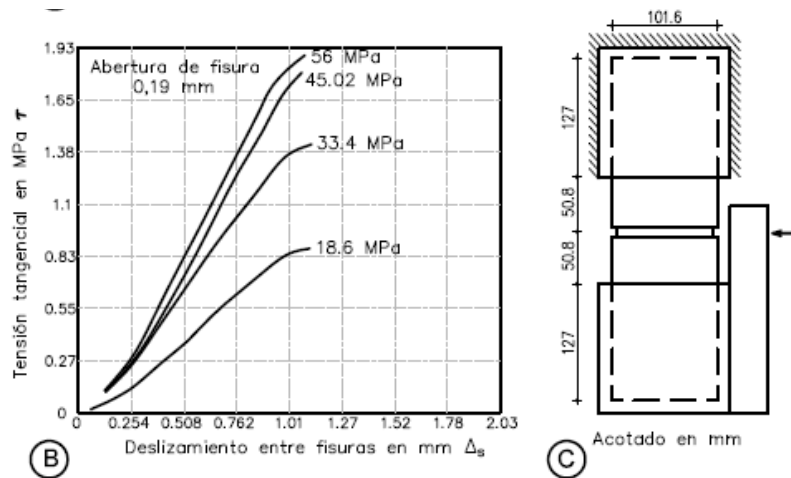


Figura 5 Ensayos de acoplamiento de áridos: B) Influencia de la resistencia del hormigón. C) Dimensión de bloque de hormigón ensayado y modo de aplicación de la carga. Adaptado de Fenwick y Paulay<sup>7</sup>.

Con esto se estableció una relación entre la tensión rasante soportada por la fisura gracias al engranamiento de áridos  $\tau_{ai}$  y el desplazamiento entre caras de fisura  $\Delta_s$ :

$$\tau_{ai} = \left( \frac{467}{W} - 8410 \right) (0,0225 \sqrt{f'_c} - 0,409) (\Delta_s - 0,0436w)$$

En donde:

$\tau_{ai}$  es la tensión tangencial transmitida a través de la fisura debido al engranamiento de áridos [en psi]

W es la abertura de fisura [en pulgadas]

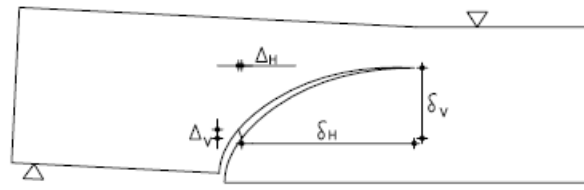
$f'_c$  es la resistencia a compresión del hormigón [en psi].

$\Delta_s$  es el deslizamiento entre caras [en pulgadas]

En 1970 Taylor<sup>9</sup> trató de mejorar los ensayos realizados por Fenwick y Paulay en varios sentidos:

- Para mejorar el comportamiento a rasante, evitar tensiones normales sobre la fisura.
- Realizando ensayos con un control de desplazamientos, tratando de emular el comportamiento a cortante-fricción que realmente sucede en una viga. En un elemento real el esfuerzo cortante y la abertura de fisura se desarrollan simultáneamente.
- Comparando los ensayos de bloques de hormigón con los realizados en vigas.

Para ello realizó los ensayos en una viga a cortante con una carga puntual, observo que los desplazamientos entre las fisuras tienen una relación constante de  $\Delta V/\Delta H$ . Para tener en cuenta este aspecto, Taylor diseñó un sistema de ensayo indirecto, en el que a medida que se incrementan las tensiones tangenciales, incrementan la abertura de fisura, tal y como había observado en ensayos de vigas, en contra de los ensayos de Fenwick y Paulay en donde la abertura de la fisura permanecía constante.



*Figura 6 Parámetros de Desplazamiento en una fisura. H. Taylor<sup>9</sup>.*

Los resultados obtenidos de los ensayos indirectos demuestran que, dependiendo de la calidad del hormigón, el tipo de árido y de la relación de desplazamiento  $\Delta V/\Delta H$ , obtendremos diferentes tensiones ultimas asociadas al acoplamiento de los áridos y la curva tensión-deformación. Los resultados de los 2 ensayos directos por Taylor para evaluar el acoplamiento de áridos dieron similares a los obtenidos por los ensayos indirectos.

J. Walraven<sup>6</sup> llevó a cabo numerosos ensayos con hormigones con resistencias entre 13 y 60 MPa, con los que propuso un modelo que evalúa la probabilidad de que el árido entre en contacto con la matriz de cemento al lado opuesto de la fisura. Para lograr esto idealiza la forma de los áridos como esferas, supone que el árido es más resistente que la matriz de cemento y existe un comportamiento plástico de la matriz. Las variables utilizadas en el modelo de Walraven son:

- Tensión normal a la superficie de fisura.
- Deslizamiento entre las fisuras.
- Ancho de fisura.
- Tensión tangencial a la superficie de fisura.

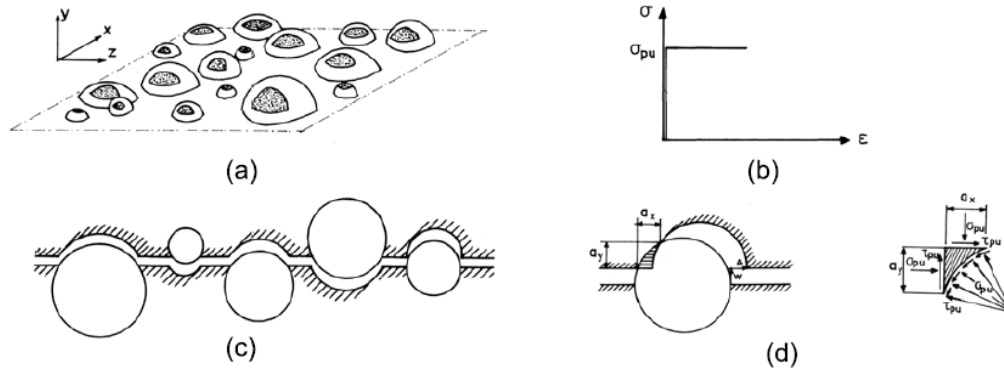


Figura 7 a) Área de contacto durante el deslizamiento; b) Tensión-deformación de la matriz rígida-plástica; c) Estructura observada del plano de fisura; d) Área de contacto entre un árido y la matriz, tensiones en el mismo<sup>6</sup>.

Warren concluyó que la resistencia de las caras de la fisura contra el deslizamiento depende principalmente de la resistencia del hormigón, mientras la influencia del tamaño máximo de áridos a este respecto (16 a 32mm) adquiere un rol más secundario, para aberturas de fisura inferiores a 0.4mm.

Vecchio y Collins<sup>10</sup>, tomando en cuenta los estudios de Walraven, propusieron que la capacidad de transferencia por fricción depende de  $\sqrt{f'c}$  según la expresión:

$$\tau_{ci} = 0,18\tau_{cimax} + 1,64\sigma_{ci} - 0,82 * \frac{\sigma_{ci}^2}{\tau_{cimax}}$$

y  $\tau_{cimax}$  se calcula como:

$$\tau_{cimax} = \frac{\sqrt{f'c}}{0,31 + 24(\frac{w}{a + 16})}$$

En donde:

- $\tau_{ci}$  es la tensión tangencial paralela a la fisura.
- $\sigma_{ci}$  es la tensión normal a la fisura.
- $\tau_{cimax}$  es la tensión tangencial máxima según la propuesta a la que puede llegar paralela a la fisura.
- $f'c$  es la resistencia a la compresión del hormigón en N/mm<sup>2</sup>.
- $a$  es el tamaño máximo del árido en mm.
- $w$  es la abertura de fisura en mm.

A diferencia de la propuesta en los modelos de dientes, en la propuesta de Vecchio y Collins no aparece el deslizamiento entre fisuras. Esta simplificación permite introducir la



propuesta de la Modified Compression Field Theory (MCFT). En 1991 Collins y Mitchell<sup>11</sup> simplificaron la propuesta obviando los efectos favorables de las compresiones a través de las fisuras, y combinando las dos ecuaciones anteriores, la tensión tangencial transmitida a través de la fisura queda:

$$\tau_{ci} = \frac{0,18\sqrt{f'c}}{0,3 + 24\left(\frac{w}{a + 16}\right)}$$

### 2.1.3 Tensiones residuales de tracción en las fisuras:

Al hormigón fisurarse, no se forma una fisura limpia, y se mantienen pequeños puentes de hormigón entre las superficies las cuales son capaces de transmitir tensiones de tracción hasta los anchos de fisura entre 0,05 y 0,15mm. Este fenómeno, que genera una rama suave de “softening”, la cual desciende después de alcanzar el pico de tensión en el diagrama tensión deformación del hormigón traccionado.

Gopalaratnam y Shah<sup>12</sup>, en 1985 concluyeron que la resistencia a tracción post-pico puede estar ocasionada por discontinuidades en la fisura a nivel microscópico que unen las dos superficies de la fisura.

Puesto que las deformaciones están localizadas en una zona muy pequeña, debemos expresar la respuesta en términos de tensión-abertura de fisuras en vez de deformaciones. Las proporciones de árido, la relación agua/cemento y la edad influyen en la respuesta a tracción del hormigón de la misma manera que lo hacen en compresión.

El módulo de compresión es el mismo modulo que el de elasticidad tangente de tracción. La zona pre-pico del diagrama tensión deformación es menos lineal en compresión que en tracción.

Debemos tomar en cuenta que el factor más importante para evaluar el cortante transmitido a través de la fisura, y que aparece en todas las propuestas, es el ancho de fisura  $w$ . A mayor ancho de fisura, menos cortante es transmitido a través de la fisura.

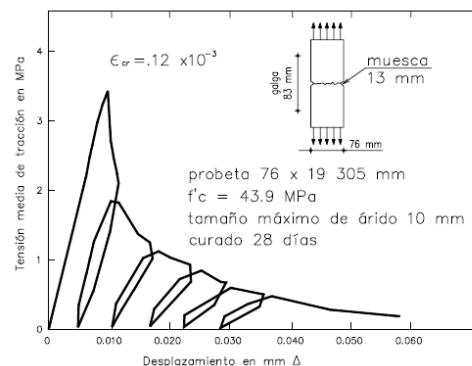


Figura 8 Respuesta de una probeta ensayada a tracción simple. Adaptado de Gopalaratnam y Shah<sup>12</sup>

### 2.1.4 Efecto pasador

Park y Paulay<sup>13</sup> clasifican tres mecanismos que pueden desarrollar la resistencia por efecto pasador de una barra de acero a través de un plano de fisuración. Estos son:

- Cortante de la barra.
- Flexión de la Barra
- Torcedura en la Barra.

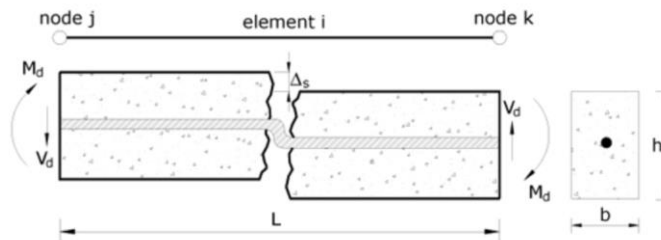


Figura 9 Mecanismo de acción de efecto pasador.<sup>14</sup>

A pesar de que en los ensayos realizados por Philips<sup>15</sup> indicasen que la torcedura era la principal fuente de resistencia por efecto pasador, especialmente al utilizar barras de pequeño diámetro, el deslizamiento entre fisuras para movilizar dicha resistencia, moviliza una resistencia mucho mayor por cortante-fricción.

Muchos autores han tratado de aislar mediante ensayos el efecto pasador de los demás mecanismos resistentes a cortante de un elemento de hormigón sin armadura a cortante. Entre los más destacados hay dos tipos de ensayos a citar:

- Los ideados por Krefeld y Thruston<sup>16</sup>, utilizados en mayor o menor medida por otros autores, entre ellos Taylor<sup>17</sup>, en los que se evalúa la resistencia de este mecanismo en una viga, y cuya configuración presentamos en la figura siguiente. En estos ensayos, se construía inicialmente el bloque central, y a posteriori el resto de la viga. La forma construida simula la configuración de las fisuras diagonales que se producen en una viga, tratadas para evitar adherencia con el resto de la viga y evitando así el mecanismo resistente de cortante fricción. La carga se aplica puntualmente en el bloque central gracias a una chapa que atravesaba un hueco central a tal efecto.

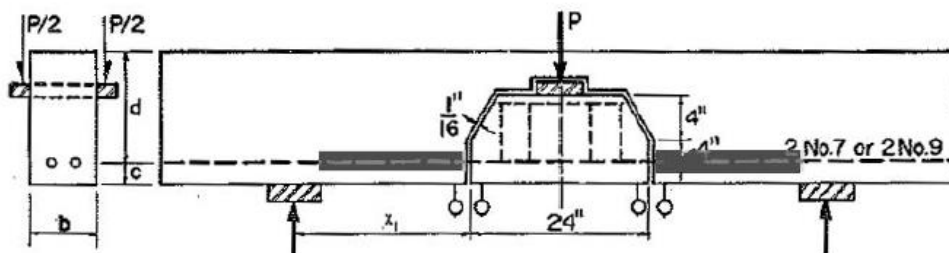
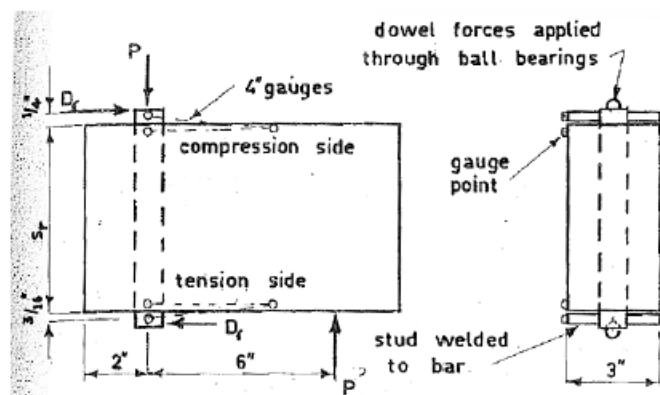


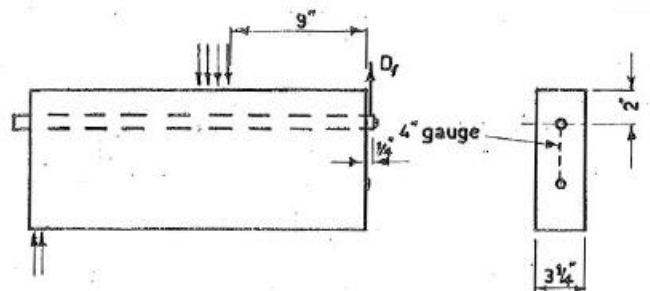
Figura 10 Esquema de las vigas ensayadas por Krefeld y Thruston<sup>16</sup>.

- Los ideados por Fenwick y Paulay<sup>7</sup>, en los que se trata de evaluar la resistencia del mecanismo en un diente del modelo de Kani, y cuyo modelo presentamos a continuación. Aunque hicieron otro tipo de ensayo, con elementos más alargados, emulando el ultimo diente para tener en cuenta la flexión de las barras longitudinales.

En los ensayos para tipo viga, además de una fuerza transversal al acero de refuerzo, aplicamos una tracción en la barra, en contra de lo que sucede en los ensayos tipo diente. Sin embargo, en segundos se emula la sucesión de fisuras, y por tanto de efectos pasadores, mediante las dos fuerzas contrapuestas en una distancia relativamente corta.



*Figura 11 Ensayo tipo 1 para evaluar el efecto pasador de la campaña de Fenwick y Paulay<sup>7</sup>*



*Figura 12 Ensayo tipo 2 para evaluar el efecto pasador de la campaña de Fenwick y Paulay<sup>7</sup>*

Los factores más importantes que influyen en el mecanismo de transferencia del efecto pasador en vigas sin acero transversal son:

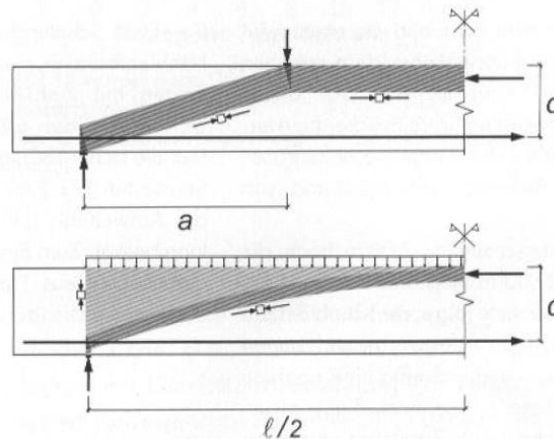
- El diámetro, distribución y número de barras.
- Propiedades de adherencia de la barra.

- Recubrimiento.
- Deslizamiento entre fisuras a nivel de armadura longitudinal.
- La resistencia del hormigón.
- El ancho de la viga de hormigón a la altura de las armaduras.
- La longitud de la barra dentro del hormigón.
- La posición de la barra en el momento del hormigonado, diferenciación descubierta por Fenwick y Paulay.

Diferentes autores<sup>5 7 13 18</sup> concluyeron que el efecto pasador no es muy importante en relación a los demás presentados en el presente capítulo. Esto debido a que la máxima fuerza a cortante que se puede transmitir está limitada por la resistencia a tracción del hormigón en las zonas señaladas gris al centro de vano. Aunque, ha de resaltar que, en elementos con grandes cantidades de armadura longitudinal distribuida en más de una capa, se puede obtener una colaboración a cortante significativa.

### 2.1.5 Efecto Arco

Se produce cuando se forma el mecanismo de bielas (en forma de arco) y tirantes descrito en la figura siguiente. Esto es especialmente importante según Collins y Mitchell<sup>19</sup>, cuando  $a/d < 2,5$ , siendo  $a$  la luz sometida a cortante en el ensayo y " $d$ " el canto útil del elemento ensayado.



*Figura 13 Efecto arco en un ensayo con cargas puntuales y en un ensayo con carga repartida<sup>20</sup>.*

En la figura siguiente se muestran la variación de la tensión a cortante en rotura en función del cociente  $a/d$ , para una serie de ensayos de Kani<sup>8</sup>, en vigas simplemente apoyadas con la aplicación de dos cargas puntuales. Además, la figura muestra el análisis de Collins y Mitchell<sup>19</sup> mediante un análisis por el método de bielas y tirantes; y otro análisis por un método seccional.

En esta serie de ensayos de Kani se observa que a medida que la relación  $a/d$  se incrementa de 1 a 7, la resistencia a cortante se reduce, hasta llegar a un sexto del valor inicial. Los ensayos

experimentales realizados por Collins y Mitchell, muestran la existencia de dos tipos de mecanismos sustentantes de la carga diferentes:

- Las vigas con poca esbeltez, en las cuales el cociente  $a/d < 2.5$ , soportan la carga gracias a un mecanismo en arco de bielas y tirantes ilustrado en la figura siguiente. En este rango la resistencia a cortante decrece rápidamente al crecer el cociente  $a/d$ .

Las vigas con mayor esbeltez, con una relación  $a/d > 2.5$ , están gobernadas por modelos seccionales, ya que las secciones críticas a cortante están alejadas de las regiones tipo D de los apoyos.

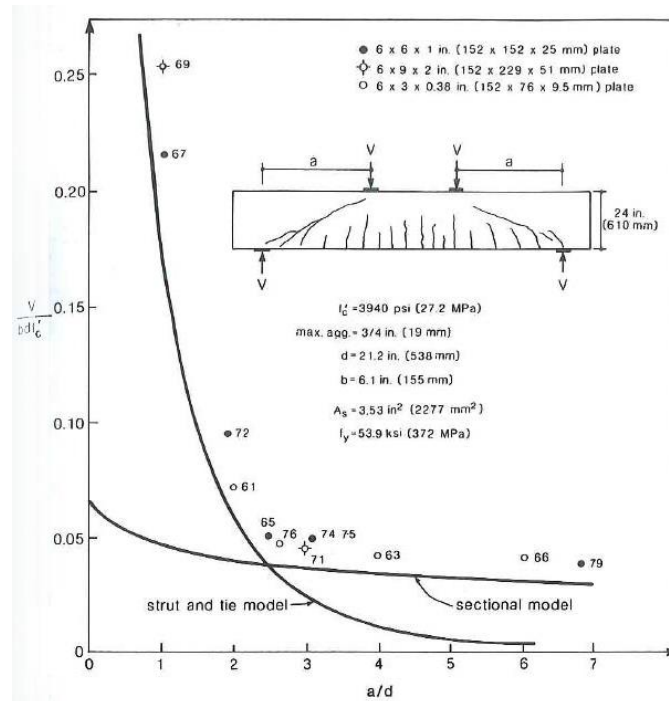


Figura 14 Resistencias a cortante observadas por Kani y evaluación del modelo resistente realizado por Collins y Mitchell en 1991<sup>19</sup>.

Otros parámetros influyentes en la resistencia a cortante.

Existen diferentes parámetros que afectan a la resistencia a cortante de un elemento de hormigón armado o pretensado sin armadura transversal. En diversos estudios, entre ellos el de Leonhardt<sup>21</sup> comentaron que los parámetros que influían en la resistencia a cortante eran “aproximadamente 20”. Los más importantes se podrían clasificar en dos tipos: los dependientes de la sección del elemento, y los que no son dependientes de la sección del elemento.

Los dependientes de la sección del elemento son:

- La forma de la sección.
- La cuantía de armadura longitudinal a tracción
- El efecto tamaño.
- La resistencia a compresión del hormigón.
- El efecto del pretensado.

Por otro lado, los que no dependen del tipo de sección son:

- La relación momento-cortante, en vigas con carga distribuida.
- La distancia de la carga al apoyo.

## 2.2 Parámetros Influyentes sobre la resistencia a cortante de elementos lineales sin acero transversal.

A continuación, se presentan los parámetros influyentes sobre la resistencia a cortante de elementos lineales, agrupados en cinco bloques.

### 2.2.1 Resistencia a compresión del hormigón

Hasta la década de los 50, la raíz cuadrada de la resistencia a compresión del hormigón  $\sqrt{f'c}$ , se planteaba como la principal variable para predecir la resistencia a cortante de elementos sin armadura transversal. Actualmente, la fórmula simplificada de la ACI 318-08<sup>22</sup> y otras más todavía dependen exclusivamente del parámetro  $\sqrt{f'c}$  para diseñar este tipo de elementos sin armadura transversal. Sin embargo, Rebeiz**Error! Bookmark not defined.**, gracias al análisis de los resultados de 350 ensayos, pudo identificar que no hay relación directa entre el parámetro  $\sqrt{f'c}$  y la resistencia a cortante, tanto para hormigones normales como para hormigones de alta resistencia.

Cladera<sup>23</sup> mediante el análisis por Redes Neuronales Artificiales (RNA), evaluó la influencia de la resistencia a compresión del hormigón para diferentes cantos útiles, y realizó una propuesta a partir de este análisis. En este análisis pudo observar que para cantos útiles de 250mm la resistencia a cortante varía de forma casi lineal con respecto a  $f_c$ , sin embargo, para los elementos con canto útil de 900 mm, un incremento en la resistencia a compresión del hormigón produce una resistencia prácticamente constante por cortante por el efecto tamaño.

Por tanto, se puede concluir que la resistencia a compresión del hormigón, si bien es un factor influyente en la resistencia a cortante de elementos lineales sin armadura transversal, debe ser combinado con otros, para predecir de forma adecuada la citada resistencia a cortante.

### 2.2.2 Armadura longitudinal

En 1998 el comité 445 ASCE-ACI publicó en sus investigaciones la influencia que tiene la cuantía de la armadura longitudinal en la resistencia a cortante expresada según el cociente  $\frac{v_u}{f'_c}$  (ver figura a continuación), en base a diferentes expresiones de origen empírico aplicadas para dimensionar la resistencia a cortante de elementos de hormigón armado, sin armadura transversal<sup>3</sup>. En donde  $V_u$  es la tensión nominal a cortante y  $f'_c$  es la resistencia a compresión del hormigón. Como se puede observar en la figura siguiente, en las vigas con cuantías bajas de armadura longitudinal, la rotura se produciría bajo tensiones nominales a cortante muy bajas<sup>3</sup>.

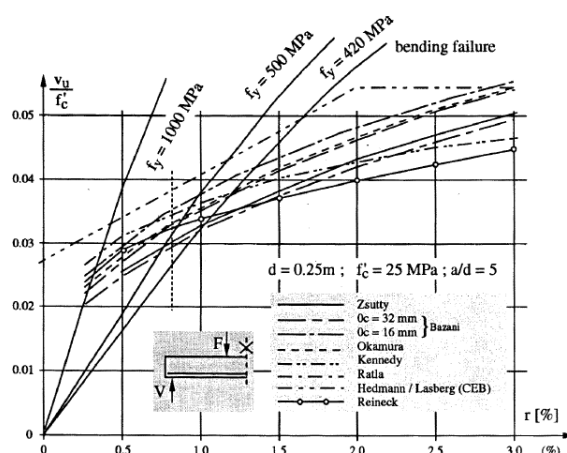


Figura 15 Relación entre la resistencia a cortante y la cuantía de refuerzo longitudinal, de diferentes predicciones de base empírica<sup>3</sup>.

En 2002 Cladera<sup>23</sup> preparó una red RNA mediante una base de datos que contenía los resultados de los ensayos a cortante de 177 vigas. Una vez entrenada la red, la utilizó para observar la incidencia de diferentes parámetros en la resistencia a cortante de vigas sin armadura transversal, entre ellos la cuantía de armadura longitudinal. Observando los resultados pudo distinguir que la cuantía de armado longitudinal y la resistencia a compresión del hormigón hacen variar la resistencia.

El informe ASCE-ACI 426<sup>24</sup> sugirió que la reducción de la capacidad de esfuerzo cortante asociada a la reducción de cuantía longitudinal puede explicarse por un aumento del ancho de la fisura, lo que genera una resistencia inferior del mecanismo cortante-fricción, una fisuración a flexión más alta que reduce el tamaño de la zona de compresión, y a su vez conlleva a una reducción del efecto pasador.

### 2.2.3 Efecto tamaño

En agosto de 1955, en un almacén de las fuerzas aéreas en Shelby, Ohio, se produjo una rotura frágil a cortante, que hizo que se replanteasen los códigos de diseño a cortante<sup>25 26</sup>. El colapso se produjo por la rotura a cortante de vigas de 914 mm de canto que no tenían armadura transversal en el sitio de rotura, y sólo tenían un 0.45% de armadura longitudinal. Las vigas rompieron con una tensión tangencial media por cortante muy por debajo del valor de diseño de la ACI en aquel entonces.

Los ensayos llevados a cabo por la Portland Cement Association<sup>25</sup>, en vigas de 305 mm de canto, indicaban que las vigas podían resistir tensiones tangenciales medias a cortante de 1,0 MPa antes de romper. Sin embargo, la aplicación de tensiones de tracción de 1,4 MPa, aproximadamente, reducían la resistencia a cortante a un 50%. Se concluyó que las tensiones de tracción causadas por la retracción y movimientos térmicos fueron la razón de la rotura bajo una sollicitación por cortante tan baja. Sin embargo, la resistencia a cortante disminuye a medida que crece el canto útil de la sección, como puede comprobarse en la tabla siguiente, en donde se muestran las roturas de las vigas del almacén y los ensayos para estudiar su rotura en 1957, junto el resumen de resultados de Shioya<sup>27</sup>.



*Figura 16 Fotografía del colapso en almacén de las fuerzas aéreas en Shelby, Ohio<sup>28</sup>.*

El efecto tamaño en la resistencia a cortante en vigas sin armadura a cortante fue determinado por Kani (1967). Ensayó cuatro series de vigas con una misma cuantía longitudinal (2,8%), sin armadura transversal y una misma resistencia del hormigón a compresión (26 MPa). Cada serie tenía un canto diferente (0,15 m, 0,30 m, 0,60 m y 1,20m) con un ancho de alma único de 0,15 m, además variaba la relación  $a/d$  de 2 a 8.

Kani concluyó que el efecto tamaño tenía una influencia mayor de la que se estimaba en aquella época sobre la capacidad a cortante en vigas sin armadura transversal y demostró que al aumentar el canto de una viga, el ancho de fisura en puntos sobre la armadura longitudinal aumentaba y, a su vez, disminuía la tensión de corte de rotura. En 1972, Taylor<sup>29</sup> subrayó la influencia del efecto tamaño, pero señaló que dicha influencia se ve disminuida si se escala correctamente el tamaño máximo del árido al igual que el resto de dimensiones en dichos



ensayos. Shioya (1989)<sup>27</sup> reafirmó este hecho para cantos de 3000 mm aumentando el número de los datos experimentales disponibles mediante una campaña experimental en la que estudiaba la influencia del tamaño máximo del árido junto con el efecto tamaño.

La figura muestra la tensión media de cortante que causa el colapso de la viga en función de su canto y su tamaño máximo de árido.

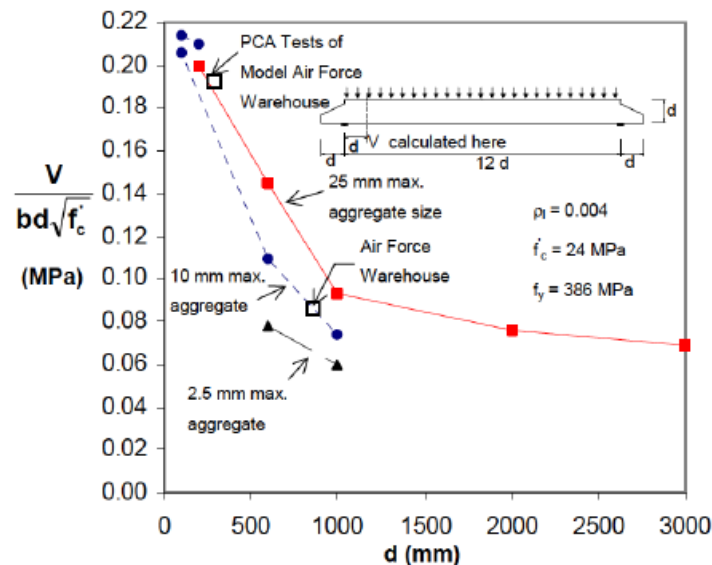


Figura 17 Influencia del canto del elemento y el tamaño máximo de árido en la tensión nominal de rotura a cortante<sup>23</sup>.

En general, se acepta que la principal razón para que el efecto tamaño sea uno de los parámetros influyentes en la resistencia a cortante es que cuanto mayor es el canto útil de la viga, mayores son las fisuras diagonales y, consecuentemente, se reduce la capacidad de transmitir esfuerzos cortantes en la a través de las fisuras; sin embargo, hay un desacuerdo en la manera de modelizar este fenómeno. Este desacuerdo lo resumieron Bazant et al. En el 2011<sup>30</sup> explicando que la resistencia media a cortante en una sección de hormigón armado, según lo establecido por Collins<sup>31</sup>, decrece con respecto del canto de la viga según una expresión tipo:

$$\frac{1}{1 + ch}$$

Donde "c" es una constante y "h" es el canto de la pieza. Mientras que Bazant, en base a la mecánica de fractura, defiende la tensión nominal a cortante debe decrecer con respecto al canto en función de  $h^{-1/2}$ .

En cualquier caso, las diferencias entre uno y otro enfoque se aprecian a partir de grandes cantos. Zararis<sup>32</sup> argumenta que la rotura a cortante en vigas esbeltas se debe a una rotura por tracción indirecta del hormigón, que tiene lugar en una región determinada de la barra situada entre el punto de aplicación de la carga y la punta de la primera rama de la fisura a crítica a cortante. Zararis pudo observar que el efecto del tamaño en la rotura a de cortante de vigas esbeltas parece depender de la longitud del vano a cortante.

#### 2.2.4 Efecto del pretensado

Una tensión de compresión aumenta la resistencia a cortante de vigas sin armadura transversal, aunque debemos tomar en cuenta que las vigas sin armadura transversal sometidas a una fuerte compresión axil y cortante pueden colapsar muy frágilmente. La plataforma petrolífera Sleipner A colapsó en 1991 debido a esta combinación de esfuerzos<sup>33</sup>. Sin embargo, al pretensar un elemento de hormigón, la fuerza de pretensado y por tanto el axil de compresión se limitan a un 60% de la resistencia del hormigón a compresión<sup>34</sup>, con el fin de evitar la fisuración por sollicitaciones normales. Esta limitación hace que este efecto de rotura frágil no ocurra por cuestiones de pretensado en elementos solicitados a cargas transversales.

Las ecuaciones del Euro código 2<sup>35</sup> y la Instrucción española EHE-08<sup>34</sup> tienen el mismo término adicional para tener en cuenta la influencia de una sollicitación axil en la resistencia a cortante debido al pretensado. La influencia del pretensado se tuvo en cuenta en estas normativas según lo propuesto por Hedman y Losberg en 1978<sup>36</sup>. Plantearon que un elemento pretensado puede ser considerado del mismo modo que un elemento armado en relación al cálculo de la resistencia a cortante después de que el momento de descompresión sea alcanzado, por tanto, la contribución del pretensado a la resistencia a cortante puede formularse como:

$$V_p = \frac{M_0}{a}$$

Donde:

- $V_p$  es la contribución de la fuerza de pretensado a la resistencia a cortante.
- $M_0$  es el momento de descompresión
- " $a$ " es la distancia de la carga al punto de apoyo

Por tanto, la resistencia a cortante de un elemento pretensado, sin armadura transversal valdría:

$$V_{Rdc} = V_c + V_p$$

Donde  $V_c$  es la resistencia a cortante de un elemento similar no pretensado y  $V_p$  es la contribución del pretensado a la resistencia.

De las ecuaciones anteriores, para una sección rectangular de dimensiones base por altura  $b \times h$ , un pretensado  $P$ , a una excentricidad  $e_p$ , con un canto útil  $d$ , y de la fórmula de Navier se puede deducir el momento de descompresión  $M_0$  y la contribución  $V_p$ :

$$M_0 = P\left(\frac{h}{6} + e\right)$$

y sustituyendo la ecuación anterior, por la de la contribución del pretensado:

$$V_p = \frac{P * \left(\frac{1}{6} + \frac{e}{h}\right)}{\frac{a}{h}}$$

Asumiendo que en la mayoría de ensayos  $d \cong 0,85h$ ,  $e_p/h \cong 0,35h$ , y el cociente  $a/d$  suele variar entre 2.5 y 4;  $V_p$  variará entre:

$$0,15\sigma_{cp}bd \leq V_p \leq 0,25\sigma_{cp} * bd$$

Siendo el primer término de la inecuación un límite inferior suficientemente seguro para elementos sometidos a solicitaciones axiales de compresión. Nótese que en la citada inecuación se ha sustituido la fuerza de pretensado  $P$  por  $\sigma_{cp}bd$ , sustitución que queda por el lado de la seguridad.

### 2.2.5 Esbeltez de la pieza, relación $a/d$

Cuanto menos esbelta es una viga de hormigón armado (implícitamente para  $a/d < 2,5$ ), la tensión media a cortante en rotura se hace progresivamente mayor<sup>3</sup>. La razón de esto es que, puesto que las vigas tienen menor esbeltez, es más fácil transmitir el cortante directamente al soporte a través de una biela comprimida, tal y como se ha mostrado en la sección en donde se presenta el efecto arco.

Para vigas esbeltas (con relación  $a/d > 2,5$ ) este parámetro también es influyente. De hecho, la formulación del Código Modelo de 1990<sup>37</sup>, basada en análisis de empíricos, ya proponía tener en cuenta este término en cuenta para evaluar la resistencia a cortante de un elemento sin armadura transversal. En la figura siguiente se presenta la influencia del cociente  $a/d$  predicho por el análisis mediante Redes Neuronales Artificiales realizado por Cladera en el 2002<sup>23</sup>, y se compara con los resultados del Código Modelo 90, en donde se observa una concordancia adecuada. Sin embargo, la Instrucción EHE-98, omitió este término, entre otros motivos, por generar dificultades para el dimensionado de elementos con cargas distribuidas.

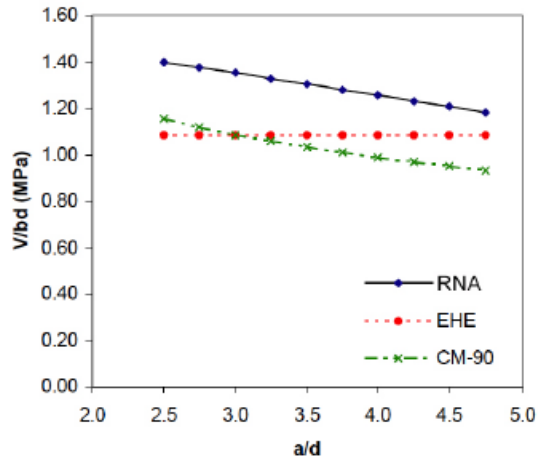


Figura 18 Influencia del cociente  $a/d$  en la resistencia a cortante. Análisis mediante RNA comparado con la Instrucción EHE-98 y el Código Modelo de 1990<sup>23</sup>.

## 2.3 Modelos Teóricos Sin Armadura Transversal.

### 2.3.1 Modelos de dientes

En 1964 Kani procuró una aproximación más realista, desarrolló un modelo racional para explicar el comportamiento a flexión y cortante en vigas de hormigón armado<sup>38</sup>. Este simplificaba la viga como una estructura en forma de peine una vez aparecidas las fisuras a flexión, tal y como se muestra en la figura siguiente.

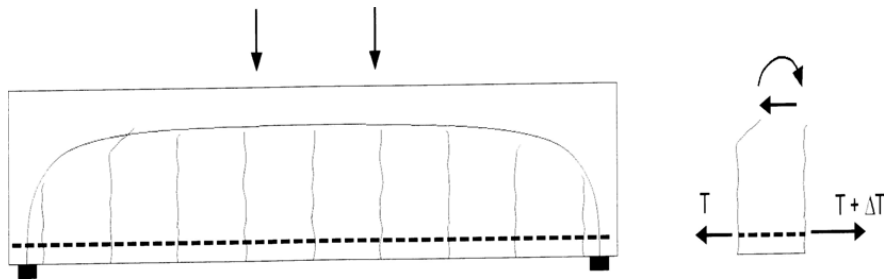


Figura 19 Modelo de Peine de Kani para vigas que fallan a cortante.

La fisura diagonal era planteaba como el resultado de la flexión de los “dientes” de hormigón. Estos “dientes” se suponían como voladizos empotrados en su parte superior y sometidos a flexión por el incremento de tracción  $\Delta T$  producido por la adherencia del hormigón con las armaduras traccionadas por los efectos de la flexión. La rotura a cortante ocurría cuando la fuera por la flexión hacía que se superase la resistencia a tracción del hormigón en la “raíz del diente”.

Fenwick y Paulay<sup>7</sup> y Taylor<sup>17</sup> luego de evaluar el modelo de Kani llegaron a diversas conclusiones. Taylor concluyó que los “dientes” tienen restringida la flexión libre debido a la fricción en la superficie de las fisuras y el efecto pasador de la armadura longitudinal. Las principales características del modelo es que se deben realizar hipótesis para la distancia e inclinación de las fisuras discretizadas<sup>3</sup>. Hamadi y Regan<sup>39</sup> asumieron que las fisuras son verticales y que su separación es igual a la mitad del canto útil (es decir,  $s = d/2$ ), mientras que Reineck<sup>5</sup> entendía anteriormente que a partir de un análisis de flexión, las fisuras tienden a 60 grados con una separación de 70% de la altura fisura,  $s = 0,7(d-c)$ , siendo “c” es la profundidad de la compresión a flexión. Dada una separación fisuras, se pueden calcular el desplazamiento a cortante y ancho de las fisuras.

Teniendo en cuenta los mecanismos de transferencia de cortante, Reineck llevó a cabo un cálculo de hormigón no lineal incluyendo compatibilidad y desarrolló aún más el modelo de “dientes”. La distribución del cortante entre los diferentes mecanismos fue similar a los encontrados anteriormente por Taylor<sup>17</sup>; a través de estudios realizados por Reineck el cortante-fricción era el mecanismo resistente dominante, y el efecto pasador era muy importante en los elementos reforzados con mucha armadura longitudinal.

### 2.3.2 Modelos mecánicos basados en la resistencia a cortante en el bloque de compresiones de elementos a flexión:

Entre algunos de los modelos mecánicos basados en la resistencia a cortante en el bloque de comprimido a flexión tenemos a los de Swamy y Qureshi en 1974<sup>40</sup>, M. Kotsovos, J. Bobrowski, and J. Eibl en 1987<sup>41</sup>, P. Zararis and G. Papadakis en 2001<sup>32</sup>, A. K. Tureyen, T. S. Wolf, and R. J. Frosch en 2006<sup>42</sup>, H. Park, S. Kang, and K. Choi En 2012<sup>43</sup>. Los modelos tanto empíricos como racionales se basan en que el mecanismo resistente a cortante es el de las tensiones tangenciales que es soportado por el bloque comprimido.

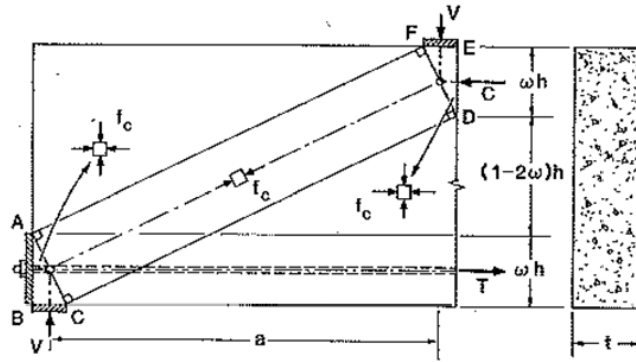
Estos tienen la particularidad de que, en las vigas con sección en T, además de tener una zona comprimida a flexión más amplia que el de una sección rectangular, la altura de la fisuración a flexión es más alta, y puesto que el centro de giro de una fisura es la punta de la misma, los anchos de fisura son mayores en las vigas en T y el mecanismo resistente cortante-fricción se ve debilitado.

Para comprobar este planteamiento, M. Kotsovos, J. Bobrowski, and J. Eibl<sup>41</sup> hicieron unos ensayos en los que se mostraba que el ancho de fisura era muy elevado, como para que se pudiesen desarrollar los mecanismos resistentes a través de la fisura: tracciones residuales y cortante-fricción. Pudieron observar además que la resistencia por efecto pasador en vigas sin armadura a cortante, depende principalmente de la resistencia a tracción del hormigón, el ancho de la viga a la altura del armado, y del diámetro de la armadura longitudinal. Debido a que las vigas con sección en T poseen un ancho reducido a la altura del armado longitudinal traccionado, este mecanismo resistente de viga T es despreciado en estos modelos.

### 2.3.3 Modelos de bielas y tirantes

Son una herramienta conceptual para visualizar las fuerzas que existen en una viga fisurada de hormigón armado. La resistencia a tracción del hormigón queda anulada al aparecer las fisuras.

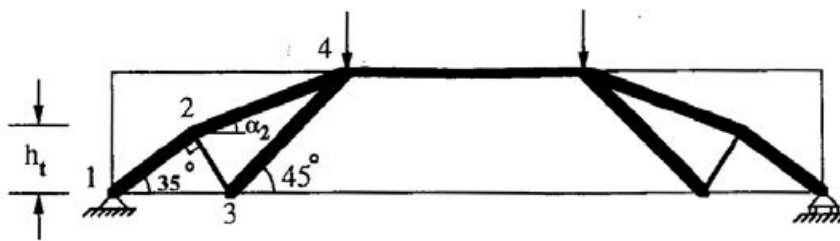
Se utilizan para dimensionar vigas cortas con una relación  $a/d < 2, 5$ .



*Figura 20 Viga Corta: Campo de tensiones, modelo de bielas y tirantes<sup>44</sup>*

Para poder utilizar el modelo de bielas y tirantes para elementos más esbeltos  $a/d > 2, 5$  se necesita una aproximación diferente para captar la rotura a cortante de estos elementos esbeltos y sin armadura transversal. En este planteamiento las tensiones de tracción del hormigón son imprescindibles para conseguir plantear el equilibrio<sup>3</sup>.

J. Schlaich, K. Schafer, and M. Jennewein<sup>45</sup> sugirieron un enfoque de bielas y tirantes más trabajado en el que incluye tirantes de hormigón traccionado. K. Al-Nahlawi and J. Wight<sup>46</sup> idearon un modelo de celosía con bielas de compresión de hormigón inclinadas ya sea  $45^\circ$  o de  $35^\circ$  y tirantes a tracción de hormigón perpendiculares a las bielas. En cuanto a la resistencia a tracción de hormigón, utilizaron un valor empírico.



*Figura 21 Modelo de bielas y tirantes por Al-Nahlawi and Wight en 1992<sup>52</sup> para vigas con  $a/d < 2$*

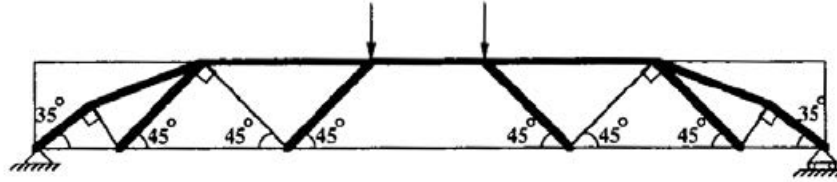


Figura 22 Modelo de bielas y tirantes por Al-Nalhawi and Wight en 199252 para vigas con  $a/d > 2$ .

## 2.4 Modelos Teóricos con Armadura Transversal

### 2.4.1 Modelos de Celosía

En los modelos de celosía, el cortante se determina a partir de ecuaciones de equilibrio, asumiendo que los tirantes plastifican y que las bielas de compresión están a 45 grados.

La resistencia del elemento depende de la disposición de las armaduras transversales. Las armaduras siguen las trayectorias de las tensiones principales o isostáticas de tracción por la disposición idónea. Su trazado puede variar, y tiene un diámetro inferior que las longitudinales a tracción y compresión.

El modelo de Ritter (1899) explica el comportamiento interno de una viga de hormigón armado en la que el hormigón resiste la compresión, y la tracción es soportada por la armadura longitudinal inferior y la armadura transversal como se muestra en la Figura 23.

El modelo de Mörsch (1902), explica como el modelo de celosía se encuentra concentrado en la armadura vertical y, considera que las tensiones normales de tracción en el hormigón que producen la tensión diagonal en relación con las tensiones de cortante, es resistida por las partes dobladas de las varillas de refuerzo inferiores, además, toda el área de los elementos que se inclinan en un ángulo de 45° hacia el centro están en tensión mientras que los opuestos están en compresión, lo que el hormigón soporta fácilmente. Por otra parte, explica que el hormigón sombreado simboliza las bielas de compresión, mientras que los estribos representan la zona de tensión.

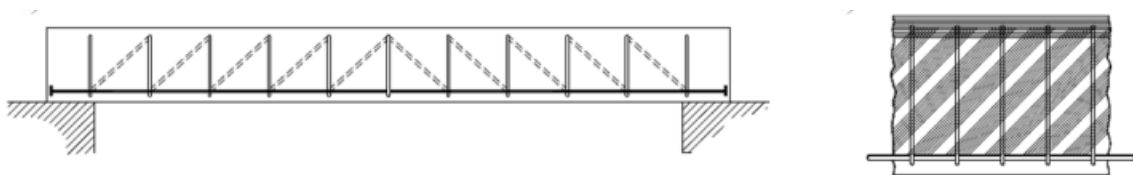


Figura 23 Esquemas de la analogía de la celosía de Ritter y Morsch

Tanto Ritter como Mörsch obviaron los esfuerzos de tracción en el hormigón fisurado y asumieron la existencia de un campo de compresiones en el hormigón agrietado suponiendo

una inclinación “b” de 45º con respecto a la directriz de la viga, pero Leonhardt demostró que este ángulo puede bajar hasta los 30º, esto hace que mejore la capacidad de la armadura transversal.

Partiendo de estos modelos es factible determinar los diferentes casos de rotura que puede presentar una viga colapsada a cortante:

**a. Rotura por la plastificación de los estribos:**

Todos los cercos que atraviesan una fisura plastifican en la rotura, el valor que resiste el cortante es la ecuación siguiente:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s}$$

No obstante, los cercos no pueden resistir el esfuerzo cortante si no pasa por ninguna fisura inclinada. Para la formación de fisuras a 45º, es necesario tener una separación entre cercos inferior al canto de la viga y, además, se requiere que estén correctamente anclados. Es decir, que los estribos deben rodear las armaduras a tracción para agrupar la componente vertical del esfuerzo que trasmite las bielas de Hormigón<sup>47</sup>

**b. Rotura por la plastificación del hormigón:**

En vigas con almas delgadas, se pueden producir aplastamiento del hormigón en el alma. La resistencia a cortante mediante el uso del modelo de celosía de ángulo variable se puede pronosticar utilizando una característica “efectiva” del hormigón, siendo el valor a utilizar de  $0.60f_{ck}$

**c. Rotura debido a la plastificación de la armadura a tracción**

La componente de las tensiones diagonales de compresión debe ser contrarrestada por una fuerza de tracción idéntico en la armadura longitudinal. La analogía de la celosía presenta que el esfuerzo a tracción es inducido por un momento flector situado en una sección en la cual depende del brazo mecánico.

**d. Armadura mínima a cortante:**

Una viga de hormigón sin armadura transversal a cortante puede tener una rotura frágil, por esto es importante suministrar una cantidad mínima de armadura a cortante para prevenir una rotura frágil en el momento que aparezca la primera fisura a cortante. Debe ser capaz de resistir las tensiones de tracción que el hormigón deja de absorber cuando fisura.

En 1990 A. Muttoni and J. Schwartz<sup>48</sup>, para elementos sin armadura a cortante, propusieron un modelo de celosía con la particularidad de que en vez de la biela de compresión ir directamente desde el punto de carga hasta el apoyo, la biela de compresión se dobla evitando la fisura a cortante.



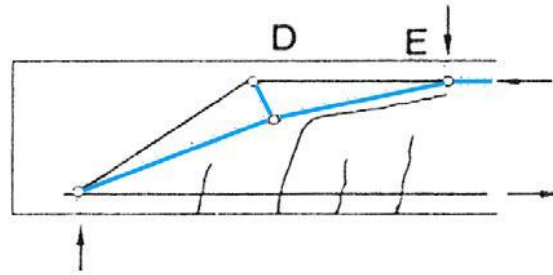


Figura 24 Bielas y tirantes propuesto por Muttoni y Schwartz<sup>48</sup>

#### 2.4.1 Teoría modificada del campo de compresiones (MCFT)

Es un modelo analítico el cual nos permite predecir la respuesta carga-deformación de los elementos de hormigón armado sometidos a esfuerzos normales y a cortante. En 1929 H. Wagner<sup>49</sup> estudió la resistencia a cortante de vigas metálicas con rigidizadores y de alma fina, después del alabeo del alma.

Asumió que no existe compresión después del alabeo en el metal y el cortante lo soportará un campo de tracciones en diagonal. Esto permitió a Wagner determinar el ángulo de inclinación de las tracciones, y a la vez consideró que el ángulo de las tracciones principales es el mismo que el de las deformaciones de tracción principales. Es conocido como la “Tension Field Theory”. En 1978, M. Collins<sup>50</sup> aplicó esta aproximación al hormigón armado, asumiendo que el hormigón armado no soporta tracciones después de la fisuración y que el cortante está soportado por un campo de compresiones en diagonal.

Esta aproximación es la que conocemos como “Compression Field Theory” (CFT). Gracias a ésta, la “Modified Compression Field Theory” (MCFT) fue presentada en 1982 por F. Vecchio and M. Collins<sup>51</sup>, y desarrollada para elementos lineales a cortante entre los años 1986 y 1988<sup>10 52 53</sup>. En este modelo modificado, el hormigón fisurado se trata como un nuevo material con sus propias relaciones tensión-deformación, tomando así en cuenta la influencia de las tensiones de tracción en el hormigón fisurado como términos de tensión media y deformación media, formulado por el equilibrio y la compatibilidad.

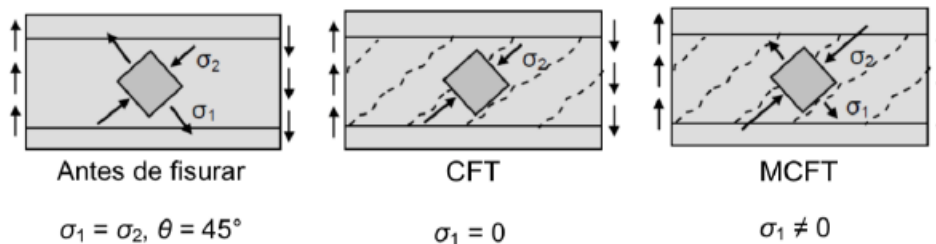
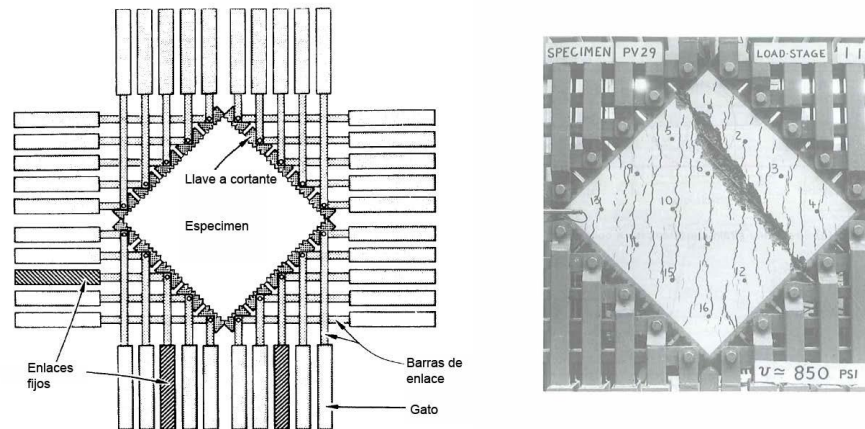


Figura 25 Diferencia entre CFT y MCFT

Cabe mencionar que el comportamiento tensión-deformación del hormigón fisurado fue deducido por primera vez a partir de los ensayos de Vecchio, y confirmado en ensayos posteriores.<sup>54</sup>



*Figura 26 Ensayos de paneles: Configuración de gatos y barras de conexión para aplicar un cortante a panel de hormigón armado y a la derecha el panel después de la rotura<sup>10 19</sup>.*

Al fisurarse el hormigón, el comportamiento puede diferir al de la curva tradicional tensión-deformación de una probeta cilíndrica. Para estas relaciones tensión-deformación se utilizan deformaciones medias, las cuales agrupan los efectos combinados de las deformaciones locales en las fisuras, deformaciones entre fisuras, deslizamiento de fisuras y fenómenos de adherencia.

A la vez, las tensiones calculadas también son tensiones medias en las que se incluye de forma implícita las tensiones entre fisuras, tensiones rasantes entre las caras de las fisuras y el conocido efecto dovela. Para que esta suposición sea razonable, las distancias usadas para determinar el comportamiento medio deben incluir varias fisuras<sup>19</sup>

El costo por utilizar relaciones medias entre tensiones y deformaciones, es que se debemos realizar un chequeo específico para asegurar que las tensiones medias son compatibles con la condición de hormigón fisurado.

Este chequeo en la fisura es una parte crítica de la MCFT y en las teorías que derivan de ésta. Implica limitar la tracción principal media en el hormigón, a un valor máximo determinado al considerar la tensión del acero en la fisura, y la capacidad de la superficie de fisura para soportar tensiones tangenciales.

Este método no requiere un cálculo explícito del efecto dovela, tensiones tangenciales en la fisura, tensiones del acero en la fisura, deslizamientos en la fisura y tensiones de adherencia.

A continuación, un resumen de la MCFT, para el caso en dos dimensiones. A la izquierda, muestra las ecuaciones de tensiones extraídas del círculo de Mohr. Implícitamente se asume que en la MCFT el ángulo de las tensiones principales en el hormigón coincide con el ángulo de las deformaciones principales ( $\mu$ ). A la derecha muestra las relaciones tensión deformación para el acero, el hormigón en compresión, y el hormigón en tracción. Debajo de cada panel se muestran los componentes de la comprobación en la fisura, para asegurar que las tensiones medias pueden ser transmitidas a través de la fisura.

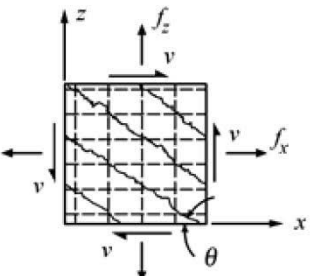
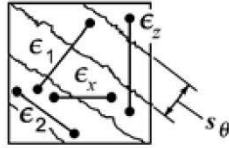
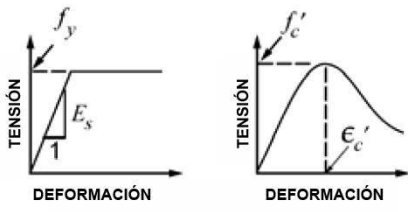
 <p><b>Equilibrio:</b></p> <p><b>Tensiones medias:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f_x = \rho_x f_{sx} + f_1 - v \cot \theta</math></li> <li>2. <math>f_z = \rho_z f_{sz} + f_1 - v \tan \theta</math></li> <li>3. <math>v = (f_1 + f_2) / (\tan \theta + \cot \theta)</math></li> </ol> <p><b>Tensiones en las fisuras:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>f_{sxcr} = (f_x + v \cot \theta + v_{ci} \cot \theta) / \rho_x</math></li> <li>5. <math>f_{szcr} = (f_z + v \tan \theta - v_{ci} \tan \theta) / \rho_z</math></li> </ol>	 <p><b>Compatibilidad de deformaciones:</b></p> <p><b>Tensiones medias:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>6. <math>\tan^2 \theta = \frac{\epsilon_x + \epsilon_2}{\epsilon_z + \epsilon_2}</math></li> <li>7. <math>\epsilon_1 = \epsilon_x + \epsilon_z + \epsilon_2</math></li> <li>8. <math>\gamma_{xz} = 2 (\epsilon_x + \epsilon_z) \cot \theta</math></li> </ol> <p><b>Anchos de fisura:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>9. <math>w = s_\theta \epsilon_1</math></li> <li>10. <math>s_\theta = 1 / \left( \frac{\sin \theta}{s_x} + \frac{\cos \theta}{s_z} \right)</math></li> </ol>	 <p><b>Relaciones tensión media - deformación media</b></p> <p><b>Acero:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>11. <math>f_{sx} = E_s \epsilon_x \leq f_{yx}</math></li> <li>12. <math>f_{sz} = E_s \epsilon_z \leq f_{yz}</math></li> </ol> <p><b>Hormigón:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>13. <math>f_2 = \frac{f'_c}{0.8 + 170 \epsilon_1} \left[ 2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c} - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c} \right)^2 \right]</math></li> <li>14. <math>f_1 = 0.33 \sqrt{f'_c} / \left( 1 + \sqrt{500 \epsilon_1} \right) \text{ MPa}</math></li> </ol> <p><b>Tensión tangencial máxima en fisura</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>15. <math>v_{ci} \leq \frac{0.18 \sqrt{f'_c}}{0.31 + \frac{24 w}{a_g + 16}} \text{ MPa, mm}</math></li> </ol>
--	--	---

Figura 28 Ecuaciones de la MCFT, E. Bentz, F. Vecchio, and M. Collins<sup>56</sup>.

Comportamiento medio del hormigón y acero  $f_{sx}$ ,  $f_{sy}$ ,  $f_1$  y  $f_2$

La Teoría Modificada del Campo de Compresiones asume que el comportamiento medio del acero se puede aproximar al de una barra desnuda. Si bien ésta es una excelente suposición antes plastificar el acero, no es apropiado después de la plastificación del mismo en la fisura.

El hormigón es capaz de soportar toda su resistencia a tracción antes de fisurar. Después de fisurar, las tensiones de tracción en el hormigón no fisurado entre fisuras continúan rigidizando el hormigón, y en algunos casos hasta aumentará la resistencia. Debido a esta gran dispersión de la fisuración antes y después de la plastificación, se presenta una simple ecuación para  $f_1$  en la figura anterior.

La degradación en adherencia, la formación de nuevas fisuras y otros daños provocan la disminución de. En el trabajo de F. Vecchio and M. Collins<sup>51</sup>, el término mostrado en la  $\sqrt{500 \epsilon_1}$  era  $\sqrt{200 \epsilon_1}$ .

Este cambio fue sugerido por Collins y Mitchell en 1987<sup>52</sup> gracias a una campaña experimental de elementos mayores a los 30 ensayados por Vecchio en los cuales había deducido la expresión de  $f_1$ .

Para este modelo asumimos que el hormigón no fisurado a compresión tiene un comportamiento tensión-deformación igual como el de un ensayo de una probeta cilíndrica. Para modelar el comportamiento tensión-deformación del hormigón fisurado diagonalmente, F. Vecchio and M. Collins<sup>51</sup> ensayaron elementos de hormigón a cortante puro. Basándose en esos ensayos observaron que la tensión principal en el hormigón  $f_2$  además de variar en función de la deformación de compresión principal  $\epsilon_2$  sino también en función de la deformación de tracción principal concomitante  $\epsilon_1$ .

El ancho de fisura,  $w$

Al someter una viga a cortante se crean nuevas fisuras, y en algunas de las anteriores fisuras a cortante también se reduce su ancho o dejan de crecer. Este complejo comportamiento dominado por la relación carga-tiempo, lo podemos simplificar como un conjunto de fisuras paralelas con una pendiente igual al ángulo de las tensiones de compresión medias. El espacio entre fisuras ( $S_\theta$ ) se calcula según la ecuación #10 de la figura anterior, que convierte la distancia calculada entre fisuras en dos direcciones ortogonales, para poder así estimar una distancia entre fisuras diagonales.

El ancho de fisura es el producto entre la deformación principal de tracción y la distancia entre fisuras, lo que supone obviar las deformaciones elásticas en el hormigón no fisurado entre fisuras.

Tensión tangencial transmitida a través de la fisura,  $v_{ci}$

Antes de que la fisura empiece a deslizarse, se asume que se pueden transmitir hasta un límite de tensiones tangenciales en la fisura. La ecuación # 15 de la figura anterior está derivada de los experimentos de J. Warlaven<sup>6</sup>. Este límite aumenta, dependiendo cuanto mayor es la resistencia del hormigón, o cuanto mayor es el tamaño del árido. Al incrementarse los anchos de fisura, se disminuye la tensión tangencial máxima transmitida a través de la fisura.

Acero a través de la fisura  $f_{sxc}$ ,  $f_{syc}$

Para el MCFT debemos comprobar que siempre nos mantengamos en el límite elástico del acero.

### 2.4.2 Compression Chord Capacity Model (CCCM), Basado en el “Multi-Action Shear Model (MASM)”<sup>57</sup>

En este modelo se considera que el fallo ocurre cuando en cualquier punto de la zona de compresión, las tensiones principales alcanzan la envolvente de fallo biaxial de Kupffer en la rama de compresión-tensión (ver figura siguiente). Esta suposición está basada en que la zona de compresión en el hormigón se somete a un estado de tensiones multiaxial, reduciendo así su capacidad al mismo tiempo que se propaga la fisura.

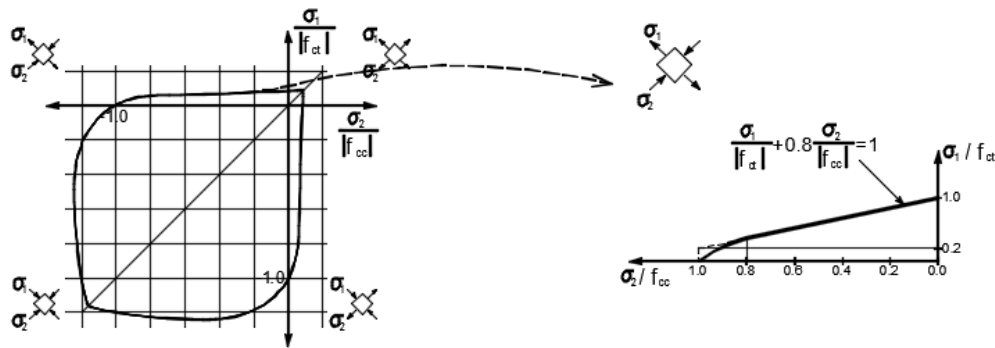


Figura 29 Envolvente de falla bajo un estado de tensión biaxial, por Kupfer.

La resistencia a cortante es la sumatoria del cortante resistido por el hormigón y el acero de refuerzo transversal. Esto debe ser menor que el esfuerzo cortante que produce el fallo en la biela de compresión.

La contribución del hormigón está separada dentro de la resistencia a cortante de la zona de compresión no fisurada ( $V_c$ ), también de las demás contribuciones como el cortante transferido a lo largo del alma fisurada ( $V_w$ ), y la el efecto pasador en el refuerzo longitudinal ( $V_l$ ) como se muestra en la ecuación siguiente.

$$V_u = (V_c + V_w + V_l) + V_s = f_{ctm} * b * d(v_c + v_w + v_l) + v_s f_{ctm} b d$$

Estas diferentes contribuciones se consideran variables a medida que se aumenta la apertura de la fisura y su propagación. Además, las contribuciones sin valores dimensionales ( $V_c + V_w + V_l) + V_s$  de los efectos de transferencia a cortante son considerados en el modelo de multi acción y el modelo mecánico.

Para la máxima resistencia a cortante debido al aplastamiento de la biela, este modelo adopta la formulación del EC-2, derivada de los modelos de plasticidad, pero suponiendo que el ángulo de la biela de compresión es igual al ángulo de la fisura crítica como se expresa en la ecuación siguiente.

$$V_{umax} = \alpha_{cw} b_w z v_l f_{cm} * \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

Por lo tanto, la expresión anterior solo depende del valor principal de las propiedades mecánicas en la cual representa otro modo de fallo, aplastamiento de la biela, y previene el fallo de la zona de compresión.

Cuando la carga aplicada incrementa, la fisura a flexión aparece al mismo tiempo que el momento flector aumenta. Esto se asume como una fisura crítica más cercana al punto de momento flector cero, de igual modo que el diagrama de momento flector se aproxima al punto de fallo, éste alcanza el momento de fisuración en la sección transversal. Cuando el fallo ocurre, se asume que la sección crítica está localizada donde la fisura crítica alcanza el eje neutro.

Cabe destacar, que la sección cercana al momento flector cero tiene mayor profundidad en la zona de compresión, producido por la biela de compresión y, además, resiste más fuerza cortante. Por otro lado, cualquier sección situada entre esta sección y el máximo momento de la sección tendrá la misma profundidad que la zona de compresión, pero estará sujeto a esfuerzos normales mayores, por lo tanto, la zona de hormigón no fisurada tendrá una capacidad de transferencia de cortante mayor.

Como resultado de las suposiciones, la distancia entre el momento flector cero y el inicio de la fisura crítica será como la ecuación siguiente y la posición de la sección crítica a cortante será como la expresión en la cual es más alto que el '6.

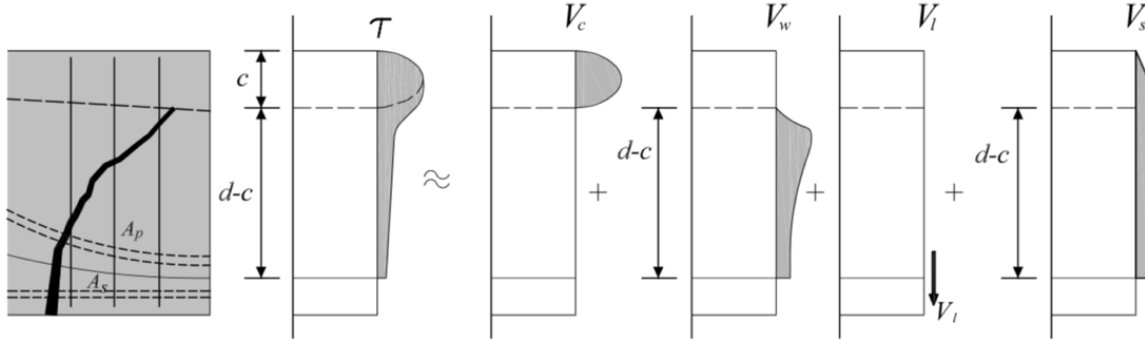
$$S_{cr} = \frac{M_{cr}}{V_u} \qquad S_u = S_{cr} + 0.85d_s$$

Esta es la razón por la cual para diseño  $d_s$ , es adoptado como la posición de la sección donde la resistencia a cortante debe ser verificada para los elementos de hormigón armado. En cuanto a elementos de hormigón pretensado, el momento fisurado es superior y la posición de la fisura crítica se encuentra lejos del momento flector cero.

Este modelo desarrollado por Marí et al. (2016)<sup>57</sup>, consideran que la carga máxima ocurre luego de que la primera rama de la fisura crítica alcanza la profundidad del eje neutro. Otros modelos toman en cuenta la fisura completa. Cuando se desarrolla la segunda rama de la fisura crítica, se activa el mecanismo de cortante-fricción en la primera rama. Es decir, que en este modelo el cortante transferido por la zona de hormigón no fisurado es aproximadamente igual que los mecanismos de contribución en otros modelos que tienen lugar después de que se halla desarrollado la segunda rama de la fisura crítica.

A medida que se abre la fisura, el mecanismo de cortante-fricción y la tensión residual disminuyen, y se produce un aumento en el cortante transferida por la zona de compresión del hormigón. Donde en la figura siguiente se indica la distribución aproximada de cada acción contribuyente, “c” es la profundidad del eje neutro y “d” la profundidad efectiva de la sección

transversal. Además, muestra la etapa de la formación de la fisura antes de llegar a la cabeza de compresión.



*Figura 30 Distribución cualitativa de las tensiones de cortante ante una falla y distribución de cortantes inminentes.<sup>58</sup>*

Este perfil de tensiones es una distribución cualitativa de las tensiones en una sección cercana a la punta de la primera rama de la fisura crítica, y no se ve afectada por el estado local de tensión alrededor de la punta de la fisura. Al desarrollar la formulación del diseño, algunas ecuaciones simplificadas adicionales también se consideran y se describe en lo siguiente:

a. Interacción cortante-flector:

Teniendo en cuenta la interacción cortante-flector cuando se produce un fallo, las tensiones de tracción residual ( $v_w$ ) y el efecto pasador ( $v_l$ ) ambos son inferiores en comparación a la resistencia a cortante por la zona de hormigón no fisurada ( $v_c$ ), es decir, que las contribuciones mencionadas se anexan a la zona no fisurada en la cual se expresa de la siguiente manera derivado de la ecuación de Vu:

$$V_u = 0.3 * \zeta * \frac{x}{d} f_{ck}^{\frac{2}{3}} * b_{veff} * d + V_s * (1 + \Delta v_{cu})$$

Los parámetros han sido definidos anteriormente y  $\Delta v_{cu}$  ( es un factor confinado no dimensional, en la cual se considera el incremento del cortante resisto por el hormigón causado por los estribos confinados en la zona de compresión.

$$\Delta V_{cu} = 0.5 \zeta \left( 1 + \frac{b}{b_w} \right) * \frac{x}{d} * \frac{b_{veff}}{b} \approx 0.4$$



Además, el parámetro  $\Delta v_{cu}$  se tomará como una constante igual a 0.4 por razones de simplificar la expresión, a pesar de que el valor actual se encuentra entre 0.2 y 0.6 para elementos normales. Se debe agregar que, la expresión anterior de  $V_u$  depende de la relación de la profundidad del eje neutro.

b. Profundidad del eje neutro:

La profundidad del eje neutro y la altura de la zona no fisurada son tratadas como iguales por propósito de diseño. La distribución de las tensiones de compresión normales en la zona no fisurada se considerará lineal; por lo tanto, la posición del eje neutral se puede calcular como la de una sección fisurada en el rango elástico. Además, en el caso de que se produce una falla a cortante antes de la deformación por flexión, suponiendo que el refuerzo longitudinal se encuentra en rango elástico.

Un aumento de la cantidad del refuerzo longitudinal aumentaría la profundidad del eje neutro, aumentando la resistencia a cortante y disminuyendo la inclinación de la fisura crítica. El refuerzo de compresión longitudinal se descarta porque su efecto de disminución de la profundidad del eje neutro se compensa por el aumento de la resistencia a cortante causado por la presencia de acero en la cabeza de compresión del hormigón en la ecuación siguiente.

$$\frac{x_0}{d} = n\rho_l \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha_e \rho_l}} \right) \approx 0.75(n\rho_l)^{\frac{1}{3}}$$

El parámetro  $\rho_l$  es la relación equivalente del refuerzo longitudinal a tracción y h es la relación modular para miembros con refuerzo y tendones de pretensado, se puede determinar de la siguiente manera:

$$n\rho_l = n_s\rho_s + n_p\rho_p \quad n_s\rho_s = \frac{E_s}{E_c} * \frac{A_s}{bd}$$

En la cual  $E_c$  es el modulo elástico de la secante del hormigón, en la cual su valor no será superior a 39,000 MPa. Es utilizado para sección en I o T.

c. Efecto tamaño:

Otros autores adoptaron un modelo mecánico en la cual consideran un factor empírico, donde se puede asimilar el efecto tamaño en una prueba de división del hormigón en elementos delgados que se muestra en la expresión siguiente, el mismo fue previamente derivado de otros trabajos por Hasegawa et al.

$$\zeta = 1.2 - 0.2a \geq 0.65 \text{ [a] mts}$$

Cuando la segunda rama de la fisura crítica se expande se necesita tener en cuenta el efecto tamaño para elementos delgados en la falla a cortante, este depende del tamaño del vano del cortante “a”, pero también depende de la profundidad “d”, que es comúnmente la relación  $\frac{a}{d}$  (esbeltez). Por lo tanto, sería proporcional al diámetro del espécimen de una prueba de división hipotética del hormigón que ocurre en la zona de compresión del elemento, entre el punto donde se encuentra la carga aplicada y la punta de la primera rama de la fisura crítica a cortante.

La ecuación siguiente es reexaminada por otros autores como Bažant et al. (1991), en donde sugieren que la resistencia de división a tracción en términos de efecto tamaño es desarrollada por un mecanismo de fractura donde se presenta en la siguiente ecuación.

$$\sigma_N = \max\left(\frac{Bf'_t}{\sqrt{1 + \beta_0}}, \sigma_y\right)$$

Donde el parámetro  $f'_t$  es una medida de la resistencia a tracción del material,  $\beta_0$  es proporcional al diámetro de un cilindro, B una constante empírica y  $\sigma_y$  es una asíntota.

Esto genera una nueva combinación del efecto tamaño y la esbeltez en la siguiente expresión:

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{(d_0)}{200}}} * \left(\frac{d}{a}\right)^{0.2} > 0.45$$

d. Inclínación de la fisura crítica:

La inclinación de la biela de compresión se considera igual a la inclinación media de la fisura a cortante en la ecuación siguiente, donde “x” es la profundidad del eje neutro de la sección fisurada, asumiendo que la resistencia a tracción del hormigón es cero para elemento de hormigón armado.

$$\cot\theta = \frac{0.85d_s}{(d_s - x)} \leq 2.5$$

e. Posición de la fisura crítica:

Cualquier otra sección más cercana al punto de momento flector cero tiene una mayor profundidad de la cabeza de compresión, producida por la inclinación de la fisura, y resistirá una mayor fuerza de cortante. Por lo tanto, cualquier sección alejada del apoyo tendrá la misma profundidad de la cabeza de compresión, pero tendrá tensiones normales superiores y, también, tendrá mayor capacidad a cortante. Además, se puede observar en la ecuación de la posición de la sección crítica a cortante.

f. Contribución del refuerzo transversal ( $V_s$ ):

Asumiendo que la suma de las fuerzas en los estribos se interseca en la inclinación de la fisura a una altura de  $(d_s - c)$  y, además, de que el refuerzo transversal ha cedido a lo largo de la altura de la fisura.

$$v_s = \frac{V_s}{f_{ct}bd} = \frac{0.85d_sA_s f_{yw}}{s f_{ct}bd}$$

Donde  $A_s$  es el área transversal por unidad de longitud, y  $f_{yw}$  es la resistencia del acero.

La contribución de las armaduras transversales resiste la fuerza transmitida por todas las armaduras que atraviesan la fisura crítica desde su nacimiento hasta el eje neutro, considerando que están plastificadas

g. Contribución del alma del hormigón fisurado ( $V_w$ ):

La resistencia a cortante del hormigón fisura en el alma es considerado como las tensiones de tracciones residuales que es capaz de transmitir la fisura crítica del hormigón fisurado.

$$v_w = \frac{V_w}{f_{ct} * bd} = 167 * \frac{f_{ct}}{E_c} * \frac{b_w}{b} \left( 1 + \frac{2G_f E_c}{f_{ctm}^2 d_0} \right)$$

En la cual  $b_w$  y  $b$  son el ancho del alma y del ala, respectivamente.  $f_{ctm}$  es la resistencia a tracción del hormigón evaluado como la principal resistencia a tracción por el Euro código 2, pero no mayor de 60 MPa para tener en cuenta hormigón de alta-resistencia,  $G_f$  es la energía de fractura del hormigón, en la cual depende de la resistencia del hormigón y tamaño de agregados;  $d_0$  es la profundidad efectiva y d no inferior a 100 mm.

$$G_f = 0.028 f_{cm}^{0.18} * d_{max}^{0.32}$$

Donde  $f_{cm}$  es la resistencia a compresión del hormigón y  $d_{max}$  es el tamaño máximo del agregado.

h. Contribución del refuerzo longitudinal ( $V_l$ ):

Es considerado cuando solo hay estribos, ya que facilitan la restricción al movimiento vertical de las barras longitudinales, permitiendo así traspasar el cortante. Este desplazamiento vertical es causado por la apertura de la fisura crítica y la formación del cortante en la cabeza de compresión.

$$v_l = \frac{V_l}{f_{ct}bd} \approx 0.23 \frac{n\rho_l}{1 - \frac{c}{d}}$$

Donde  $\rho_l$  es la cuantía geométrica de la armadura longitudinal,  $c$  es la profundidad de la fibra neutral en flexión

i. Contribución de la cabeza de compresión ( $V_c$ ):

El cortante transferido por la cabeza de compresión comienza cuando la fibra tensionada llega a la envoltura de falla Kupffer. La posición de la falla depende de la relación del momento flector y el esfuerzo cortante  $\frac{M}{V_d}$  en la sección crítica considerada. Marí et al. (2015) realizó un estudio que muestra el valor de  $\frac{M}{V_d}$  es inferior a 3, en la cual es la posición de la sección crítica, donde el fallo inicia a una distancia de la profundidad del eje neutro alrededor de  $0.425c$ , “ $c$ ” es la profundidad de la cabeza de compresión.

Mediante un análisis del círculo de Mohr, la tensión de cortante  $\tau_\lambda$  donde el punto inicia la falla puede relacionarse con las tensiones principales y normales se muestra en la ecuación siguiente.

$$\tau_\lambda = \sigma_l \sqrt{1 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_l} + \frac{\sigma_x * \sigma_y}{\sigma_l^2}}$$

Se conoce el valor de la tensión a cortante en tres puntos  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(c) = 0$ ,  $\tau(c) = 0$  y  $\tau(\lambda) = \tau_\lambda$ , se obtiene una ecuación para la distribución de tensiones a cortante asumida como parabólica y, por integración se adquiere la transferencia del esfuerzo cortante por la cabeza de compresión usando la ecuación siguiente

$$V_c = \frac{V_c}{f_{ctm}bd} = \zeta K_\lambda R_t * \frac{c}{d} * \frac{b_{veff}}{b} \sqrt{1 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_l} + \frac{\sigma_x * \sigma_y}{\sigma_l^2}}$$

En la cual  $\sigma_x$  es la tensión normal en la fibra más tensionada localizada a una distancia  $\lambda * c$  desde eje neutro;  $K_\lambda$  es el parámetro que relaciona la tensión a cortante principal en la cabeza de compresión con la tensión a cortante en la fibra más tensionada; y  $b_{veff}$  es el ancho efectivo en vigas con sección T o I que se tiene en cuenta las tensiones a cortante a lo largo de la profundidad de la cabeza de compresión en la parte del ala cerca del alma.

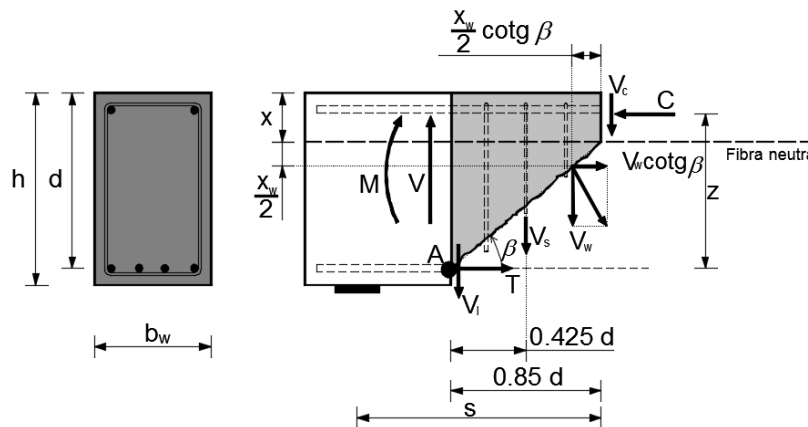
Luego de utilizar las ecuaciones de equilibrio de momento para tomar el punto donde cruza la fisura por el refuerzo longitudinal. Se obtiene la fórmula de las tensiones normales a compresión en el punto de fallo de la cabeza de compresión. Dicho lo anterior, se establecen las

ecuaciones de equilibrio entre las fuerzas internas y los resultados de las tensiones y se vuelve a reescribir la ecuación y, realizando un proceso de iteración para encontrar el parámetro  $V_c$  que depende de  $V_s$ . Después de resolver las ecuaciones y hallado el valor de  $Z_4$ , se considera que la función de 4 | es lineal y la siguiente ecuación es propuesta como lineal.

$$V_c = \zeta \left( \left( 0.88 + \left( 0.2 + 0.50 * \frac{b}{b_w} \right) * v_s \right) * \frac{x}{d} + 0.02 \right) * \frac{b_{veff}}{b} * k_p$$

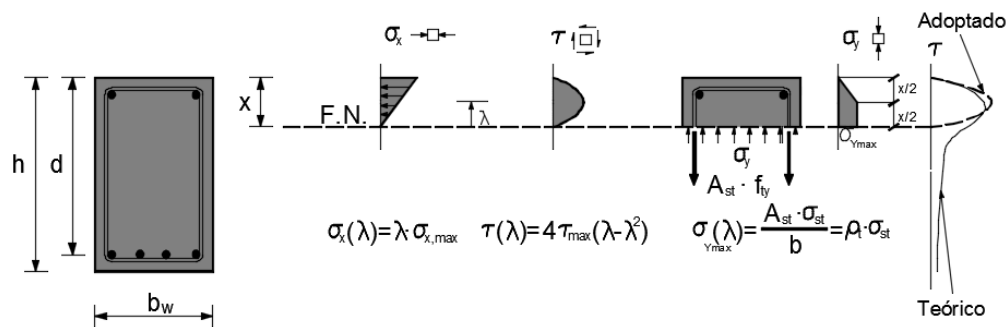
$k_p$  es un parámetro cuando hay presencia de pretensado, por el contrario, el valor de  $k_p$ , será igual a 1 para casos de hormigón simple armado.

La fisura crítica nace originalmente de una fisura de flexión, allí donde para la carga de rotura, el momento es aproximadamente igual al momento de fisuración. La misma se desarrolla inclinada en la zona del alma, hasta alcanzar el eje neutro de flexión y finalmente se propaga en la zona comprimida, en dirección a la carga. La sección donde acaba la primera rama de la fisura se considera situada a una distancia  $0.85d$  del origen de la fisura, de acuerdo con lo observado experimentalmente.



*Figura 31 Componentes de la resistencia a cortante en una viga de hormigón fisurada*

De acuerdo a como la carga aumenta, las fisuras se abren y la contribución del alma se reduce y se concentra en la zona más estrecha de la fisura. Esto provoca que las tensiones tangenciales también se concentren alrededor del eje neutro tanto en el alma como dentro de la cabeza de compresión. Por razones de simplificación de los cálculos, se desprecian las tensiones tangenciales del alma, resultando la distribución parabólica de la figura siguiente, en la que también se pueden observar las tensiones verticales de confinamiento provocadas por la armadura transversal en la cabeza.



*Figura 32 Hipótesis de distribución de tensiones en la cabeza de compresión*

Debido a que la cabeza de compresiones está sometida a un estado biaxial de tensiones, se considera que la rotura tiene lugar cuando las tensiones principales ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ), en el punto más desfavorable de la misma, alcanzan la envolvente de rotura del hormigón propuesta por Kupfer (1973) en la rama Tracción-Compresión, cuya ecuación se indica en la figura 28. Este punto crítico, depende de la relación  $M/V$ , y para valores usuales, está situado aproximadamente a una distancia  $\lambda = 0.425 x$  del eje neutro

Ecuaciones para comprobación o dimensionamiento.

Para facilitar el uso práctico del modelo multicomponente, se simplificó, dando lugar al modelo denominado: “Modelo basado en la contribución de la cabeza de compresiones, (CCCM)”. Esto debido a que posee la contribución más relevante de  $V_c$ . A tal fin, las contribuciones del alma y de la armadura longitudinal, se han integrado con las de la cabeza y la armadura transversal, adoptando valores medios representativos. La resistencia a cortante se convierte entonces en:

$$V_{Rd} = V_{cu} + V_{su} \leq V_{Rd,max}$$

Donde  $V_{cu}$  es la contribución del hormigón de valor:

$$V_{cu} = 0.3 \zeta \frac{x}{d} f_{cd}^{2/3} b_{v,eff} d \leq V_{cu,min} = 0.25 \left( \zeta K_c + \frac{20}{d_0} \right) f_{cd}^{2/3} b_w d$$

Donde el parámetro  $b_{veff}$  es un ancho eficaz a cortante para tener en cuenta la contribución de las alas en secciones en T o similares, que influye dependiendo de sus dimensiones; Su valor depende de si la fibra neutra cae dentro o fuera de la cabeza de compresión de la sección, tal como se indica a continuación:

$$Si x \leq h_f \rightarrow b_{v,eff} = b_v = b_w + 2h_f \leq b$$

$$Si x > h_f \rightarrow b_{v,eff} \approx b_w + (b_v - b_w) \left( \frac{h_f}{x} \right)^{3/2}$$

$b_v$  es el ancho eficaz a flexión de la cabeza de la sección en T. Debemos tener en cuenta que haciendo  $h_f=0$  resulta  $b_{v,eff}=b_v=b_w$ , con lo que conseguimos la expresión para sección rectangular.

El factor  $\zeta$  toma en cuenta el “efecto tamaño” debido a la rotura frágil de la cabeza de compresión y la influencia de la esbeltez a cortante de la viga, “ $a/d$ ”, siendo “ $a$ ” la luz de cortante, es decir la relación  $M_{max}/V_{max}$  en el tramo donde se está evaluando el cortante. La expresión adoptada para el efecto tamaño responde a los principios de la mecánica de fractura (Bazant et al, 1991) mientras que la influencia de la esbeltez procede de estudios empíricos realizados con anterioridad mediante programación genética [Pérez et al. 2012]:

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{d}{200}}} \left( \frac{d}{a} \right)^{0.2} \geq 0.45$$

El cortante mínimo tiene en cuenta que, para cantos o cuantías, la contribución del alma “ $v_w$ ”, puede ser mayor que la supuesta en la simplificación hecha para incorporarla en  $v_c$ . Por ello, se limita la profundidad de la fibra neutra  $x/d$  a un valor  $K_c \geq 0.20$  y el canto útil a utilizar  $d_0$  no debe ser menor de 100 mm.

$V_{su}$  es la contribución de las armaduras transversales y longitudinales, la cuales incorporan el confinamiento producido en la cabeza de compresiones por los cercos y el efecto pasador y el efecto pasador en la armadura longitudinal, el cual no se contabiliza, por tanto, cuando no hay cercos que dificulten el salto del recubrimiento.

$$V_{su} = 1.4 \frac{A_{sa}}{s} f_{yad} (d - x) \sin \alpha (\cot \beta + \cot \alpha)$$

La inclinación de las bielas viene dada por:

$$\cot \beta = \frac{0.85d}{d - x}$$

La profundidad de la fibra neutra en flexión la calculamos considerando nula resistencia a tracción del hormigón y la distribución lineal de compresiones en la cabeza, a través de la expresión:

$$\frac{x_0}{d} = n \rho_l \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \rho_l}} \right) \square 0.75 (n \rho_l)^{1/3}$$

En las expresiones anteriores, “ $n$ ” es el coeficiente de equivalencia entre el acero y el hormigón ( $n = \frac{E_s}{E_c}$ ) y  $f_{ctm}$  es la resistencia media a tracción del hormigón, calculados como sigue:

$$E_c = 22000 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} ; \quad f_{ctm} = 0.3 f_{ck}^{2/3}$$

Para el cálculo de la resistencia máxima a cortante, es decir el esfuerzo cortante que agota las bielas de compresión, se coincide con la adoptada por el Euro código EC2.

En el caso de piezas de hormigón armado sometidas a esfuerzo axial de compresión (positivo) (postensado o pretensado), la profundidad de la fibra neutra aumenta y con ella la resistencia a cortante. Siempre que exista fisuración por flexión, la expresión de  $v_c$  deducida para flexión simple es válida para flexo-compresión, teniendo en cuenta de forma aproximada la influencia del esfuerzo axial en el cálculo de la profundidad de la fibra neutra:

$$x = x_0 + 0.8(h - x_0) \left( \frac{d}{h} \right) \frac{\sigma_{cN}}{\sigma_{cN} + f_{ctm}} \leq h$$

Donde  $x_0$  es la profundidad de la fibra neutra en flexión simple ( $N_d=0$ ) y  $\sigma_{cN}$  es la tensión media de compresión (positiva) introducida por el esfuerzo axial ( $\sigma_{cN}=N_d/A_c$ ).

En el caso de vigas sometidas a un esfuerzo axial de tracción (negativo), la profundidad de la fibra neutra disminuye y con ella también la resistencia a cortante de la cabeza de compresión  $V_c$ . La expresión de  $V_c$  obtenida para flexión simple es válida para flexo-tracción calculando la profundidad de la fibra neutra como sigue:

$$x = x_0 \left( 1 + \frac{N_d d}{M_d} \right) \geq 0$$

La comprobación de la resistencia a cortante debemos hacerla hacerse a una distancia “d” del punto de momento nulo, así como en las secciones donde haya un cambio de armadura longitudinal, dado que ello afecta a la profundidad de la fibra neutra. Para el caso de vigas biapoyadas, el punto de momento nulo coincide con los apoyos.

Cabe destacar que, gracias a este modelo, podemos dar una interpretación mecánica a la expresión empírica del Euro código para  $V_{u2}$  y  $V_{cu}$  (ver cf. §21.6.2 y §21.6.3). Así, en dichas expresiones, consta el término  $\rho^{1/3}$  que, de acuerdo con lo visto en este apartado, está directamente relacionado con la profundidad relativa de la cabeza comprimida,  $x/d$ , parámetro fundamental del modelo. El factor  $f_{ck}^{1/3}$  es un indicador de la resistencia a tracción del hormigón, afectado por la influencia del módulo de elasticidad del mismo, que a su vez depende de  $f_{ck}$ . Además, se constata la existencia de un efecto tamaño, en el que el canto está también afectado por el exponente  $-1/2$



## 2.5 Normativa

### 2.5.1 Diseño a Cortante por Instrucción Española EHE-08<sup>59</sup>

#### 2.3.2.1. Consideraciones generales Pag217.

De acuerdo con la Instrucción española, el esfuerzo cortante se puede alcanzar, ya sea por agotamiento de la resistencia a compresión del alma o por agotamiento de la resistencia a tracción, realizando la verificación de dos condiciones:

$$V_{rd} < V_{u1} \qquad V_{rd} \leq V_{u2}$$

Donde  $V_{rd}$  es el esfuerzo cortante efectivo del canto;  $V_{u1}$  es el esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua del alma y  $V_{u2}$  es el esfuerzo de agotamiento por tracción del alma.

El primer miembro de estas ecuaciones es el esfuerzo cortante reducido de cálculo para comprobaciones de Estado Límite Último:

$$V_{rd} = V_d + V_{pd} + V_{cd}$$

#### 2.3.2.2. Agotamiento por compresión oblicua del alma $V_{u1}$

La comprobación se realizará en el borde del apoyo y no en su eje, además, no es necesario en elementos sin armadura de cortante, ya que en estos elementos se alcanza antes el agotamiento a cortante por tracción del alma  $V_{u2} = V_{cu}$ . El esfuerzo cortante ultimo por compresión oblicua del alma viene dada por:

$$V_{u1} = K * f_{1cd} * b_0 * d * \frac{\cot\theta + \cot\alpha}{1 + \cot^2\theta}$$

Para una resistencia a compresión del hormigón de  $f_{1cd} = 0.6f_{cd}$  para  $f_{ck} \leq 60 \text{ N/mm}^2$ . Con respecto al ancho del alma  $b_0$ , considera ancho minimo del elemento;  $\alpha$ , el ángulo de las armaduras a cortante con el eje de la pieza;  $\theta$ , el ángulo entre las bielas de compresión de hormigón y el eje de la pieza; generalmente se toma  $0.5 \leq \cot g(\theta) \leq 2.0$

“K” es el coeficiente que valora el efecto del esfuerzo axil que vale 1, para estructuras habituales de vigas y losas de hormigón armado. En casos con un esfuerzo axil significativo, se tomará:

$$K = 1 + \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} \text{ para } 0 < \sigma'_{cd} \leq 0.25f_{cd}$$

$$K = 1.25 \text{ para } 0.25f_{cd} < \sigma'_{cd} < 0.50f_{cd}$$

$$K = 2.5 \left( 1 - \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} \right) \text{ para } 0.50f_{cd} < \sigma'_{cd} \leq 1.00f_{cd}$$

Donde  $\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$  es la tensión axil efectiva en el hormigón. En este parámetro también está  $N_d$  que es el axil de cálculo.

### 2.3.2.3. Agotamiento de elementos sin armadura cortante $V_{u2}$

Para esta comprobación se tiene que tener en cuenta dos casos: las zonas no fisuradas en el alma y las fisuradas a flexión.

#### a) Caso I ( $M_d < M_{fis,d}$ )

Esta condición se debe cumplir en zonas no fisuradas y con el alma comprimida. Además, se realizará en una sección situada a una distancia del borde del apoyo. El esfuerzo cortante debe ser inferior a:

$$V_{u1} = I * \frac{b_0}{S} * \sqrt{(f_{ct}, d)^2 + \sigma'_{cd} * f_{ctd}}$$

#### b) Caso II ( $M_d < M_{fis,d}$ )

Agotamiento para tracción en el alma para elementos de hormigón convencional y de alta resistencia se expresa de la siguiente manera:

$$V_{u2} = \frac{0.18}{\gamma_c} \xi (100 \rho_l f_{cv})^{\frac{1}{3}} + 0.15 * \sigma'_{cd} b_0 d$$

Donde  $f_{cv}$  es igual a  $f_{ck}$  siendo la resistencia a compresión del hormigón, en la cual no se considerará superior a 60 N/mm<sup>2</sup>.

El coeficiente  $\xi$  puede obtenerse mediante:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$$

En la que el canto útil de la sección referido a la armadura longitudinal debe expresarse en mm. Por último,  $\rho_l$  la cuantía geométrica de la armadura longitudinal a tracción, pasiva y activa adherente, anclada a una distancia respecto la sección estudiada igual o mayor al canto efectivo.

$$\rho_l = \frac{A_s + A_p}{b_0 d} \leq 0.02$$

### 2.3.2.4. Agotamiento de elementos con armadura de cortante $V_{u2}$

El esfuerzo cortante ultimo de vigas y otros elementos con armadura transversal vale:

$$V_{u2} = V_{su} + V_{cu}$$

Donde el primer término de la sumatoria es la contribución de la armadura transversal del alma a la resistencia al esfuerzo cortante y el segundo, la contribución del hormigón.

$$V_{su} = z * \sin \alpha * (\cot \alpha + \cot \theta) * \sum A_{\alpha} * f_{y\alpha,d}$$

Donde  $A_{\alpha}$ , es el área por unidad de longitud de cada grupo de armaduras que forman un ángulo  $\alpha$  con la directriz de la pieza;  $f_{y\alpha,d}$  la resistencia de cálculo de la armadura  $A_{\alpha}$ ;  $z$ , el brazo mecánico (a falta de cálculos se tomará como ( $z = 0.9d$ );  $f_{ck}$ , la resistencia característica del hormigón (expresada en N/mm<sup>2</sup>); y  $V_{cu}$ , es la contribución del hormigón a la resistencia al esfuerzo cortante.

$$V_{cu} = \left[ \frac{0.15}{\gamma_c} \xi (100 * f_{cv})^{\frac{1}{3}} + 0.15 \sigma'_{cd} \right] \beta b_0 d$$

Donde:

$$\beta = \frac{2\cot\theta - 1}{2\cot\theta_e - 1} \text{ si } 0.5 \leq \cot\theta \leq \cot\theta_e \quad \beta = \frac{2\cot\theta - 2}{\cot\theta_e - 1} \text{ si } \cot\theta_e \leq \cot\theta \leq 2.0$$

$\theta_e$  el ángulo de referencia de inclinación de las fisuras, en la cual tiene dos métodos:

a) Método simplificado

$$\cot\theta_e = \frac{\sqrt{f_{ctm}^2 - f_{ctm}(\sigma_{xd} + \sigma_{yd}) + \sigma_{xd}\sigma_{yd}}}{f_{ct,m} - \sigma_{yd}} \begin{cases} \leq 0.5 \\ \geq 2.0 \end{cases}$$

donde:  $f_{ct,m}$  es la resistencia media a tracción del hormigón, considerada positiva, y  $\sigma_{xd}$ ,  $\sigma_{yd}$  son las tensiones normales de cálculo, a nivel de centro de gravedad de la sección, paralelas a la directriz de la pieza y al esfuerzo cortante en cada una de las direcciones. Se obtendrán de acuerdo con la teoría de la elasticidad, suponiendo hormigón no fisurado y las tensiones de tracción.

b) Método general

El ángulo puede obtenerse considerando la interacción con otros esfuerzos en Estado Límite Último cuyo valor agregado es la deformación longitudinal en el alma.

$$\theta_e = 29 + 7\varepsilon_x$$

2.3.2.5. Disposición relativas a las armaduras:

a) Armaduras transversales

La cuantía mínima de armadura transversal debe cumplir la siguiente relación:

$$\sum \frac{A_{\alpha} f_{y\alpha,d}}{\sin \alpha} \geq \frac{f_{ctm}}{7.5} b_0$$

La armadura mínima debe disponerse estribos que formen un ángulo de 90°. No olvidad que  $A_\alpha$  es una armadura por unidad de longitud.

#### b) Armaduras longitudinales

Las armaduras longitudinales de flexión deberán de ser capaces de soportar un incremento de tracción respecto la producida por un K| igual a:

La separación  $S_t$  entre armaduras transversales deberá cumplir las condiciones siguientes para asegurar un buen confinamiento del hormigón sometido a compresión oblicua:

$$s_t \leq 0.8d \leq 300mm \text{ si } V_{rd} \leq \frac{1}{5} * V_{u1} \quad s_t \leq 0.6d \leq 300mm \text{ si } \frac{1}{5} V_{u1} \leq V_{rd} < \frac{2}{3} V_{u1}$$

$$S_t \leq 0.3d \leq 200mm \text{ si } V_{rd} > \frac{2}{3} V_{u1}$$

#### b) Armaduras longitudinales:

Las armaduras longitudinales de flexión deberán de ser capaces de soportar un incremento de tracción respecto la producida por un Md igual a:

$$\Delta T = V_{rd} \cot \theta - \frac{V_{su}}{2} (\cot \theta + \cot \alpha)$$

Esta prescripción se cumple de forma automática de calando la ley de momentos de cálculo K| una magnitud en el sentido más desfavorable igual a:

$$S_d = z * \left( \cot \theta - \frac{V_{su}}{2V_{rd}} (\cot \theta + \cot \alpha) \right)$$

Por último, si existen armaduras longitudinales, los estribos deben impedir el pandeo, para una separación %. no mayor de  $15\theta_{min}$ , siendo  $\theta_{min}$  el diámetro menor de las barras comprimidas.

### 2.5.2 Comparación de códigos de diseño<sup>60</sup>

En el diseño a flexión tenemos el método racional simple llamado “teoría de secciones planas”, capaz de predecir no solo la resistencia a flexión, pero también la respuesta a esfuerzo-deformación de secciones en hormigón. Debido a esto hay pocas diferencias entre los diferentes códigos internacionales, en la resistencia de flexión de una sección en hormigón o la cantidad de acero de refuerzo necesaria para asegurar una flexión dúctil.

Por el contrario, existe un desacuerdo sustancial en la magnitud de la resistencia a cortante de los elementos estructurales y el refuerzo necesario para asegurar una respuesta dúctil a cortante. Por lo que, más que utilizar un método simple, general y casi igual en comportamiento disponible para el diseño a flexión, el procedimiento para para diseño a cortante típicamente consiste en la colección de ecuaciones complejas, restrictivas.

En vista de esta disparidad entre el “estado del arte en flexión” y el “estado de arte en cortante”, no es sorprendente que las fallas de estructuras de hormigón por deficiencias en el diseño a flexión sean extremadamente raras, y que las fallas en la deficiencia por diseño a cortante ocurran más frecuentemente.

Para verificar el modelo del CCCM, “The compression chord capacity model for the shear design and assessment of reinforced and prestressed concrete beams” Antonio Marí, Jesus Bairán, Carlos Ribas, Eva Oller, Noemí Duarte. “Running head: Shear design and assessment of RC and PC beams” los autores tomaron los resultados de 4 bases de datos de campañas de ensayos de vigas de hormigón armado recopiladas por el ACI-DafStb, y compararon el modelo propuesto junto a otros 4 códigos estructurales vigentes. Todos los coeficientes parciales de seguridad fueron removidos de las formulaciones originales, y fueron utilizados la media de los valores en la resistencia de los materiales.

El método propuesto se aproximó más a los resultados obtenidos por cualquiera de las otras formulaciones de código. En resumen, de 1285 vigas ensayadas, el promedio del cociente  $V_{Real}/V_{Predicho}$  fue de 1.17 para las ecuaciones simplificadas del método.

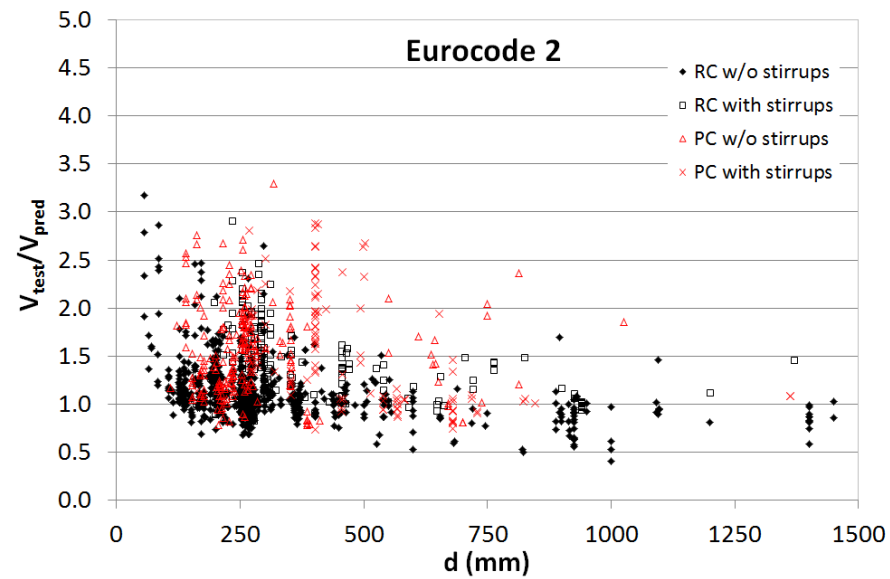
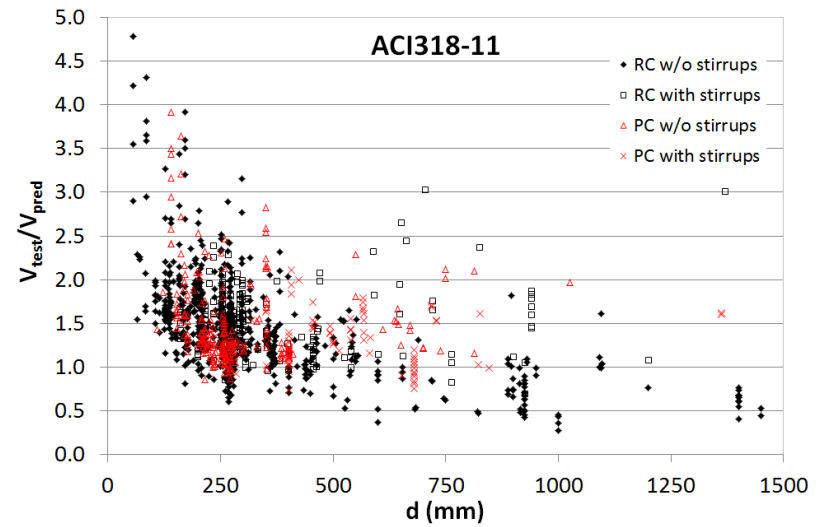
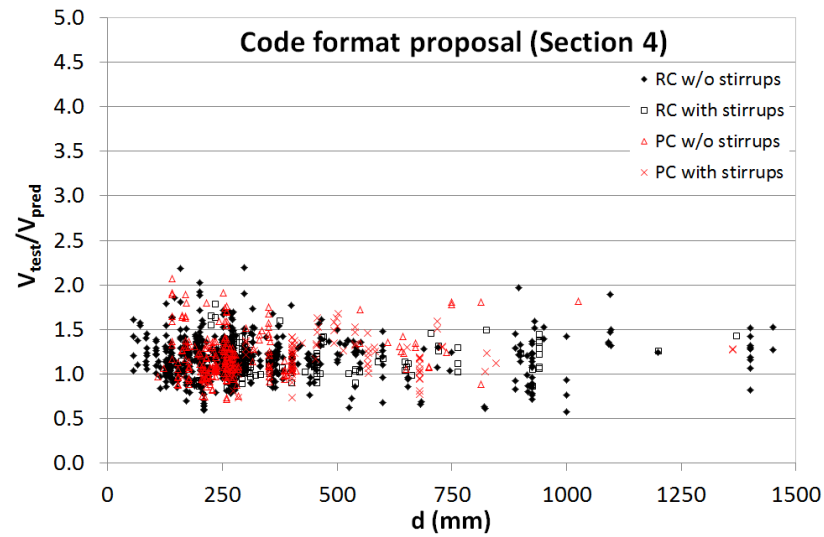
Para las previsiones del ACI ACI318-11, el cociente fue de 1.44, 1.26 para el Euro código 2, 1.35 para el código modelo del 2010 y 1.33 para la norma canadiense CSA A23.3-14.

El grado de variación conjunta o Covarianza “CoV” es del 18.6% para el modelo CCCM simplificado. Para el ACI318-04, EC-2, MC- 2010 and CSA A23.3-14 la covarianza es de 35.3%, 34.1%, 31.4% and 26.9% respectivamente.

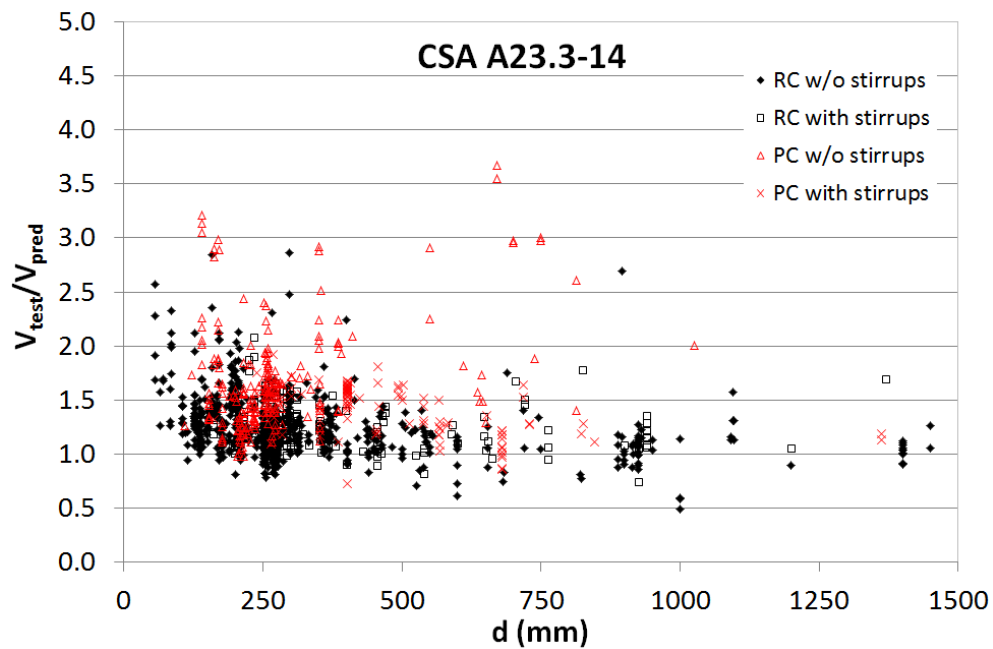
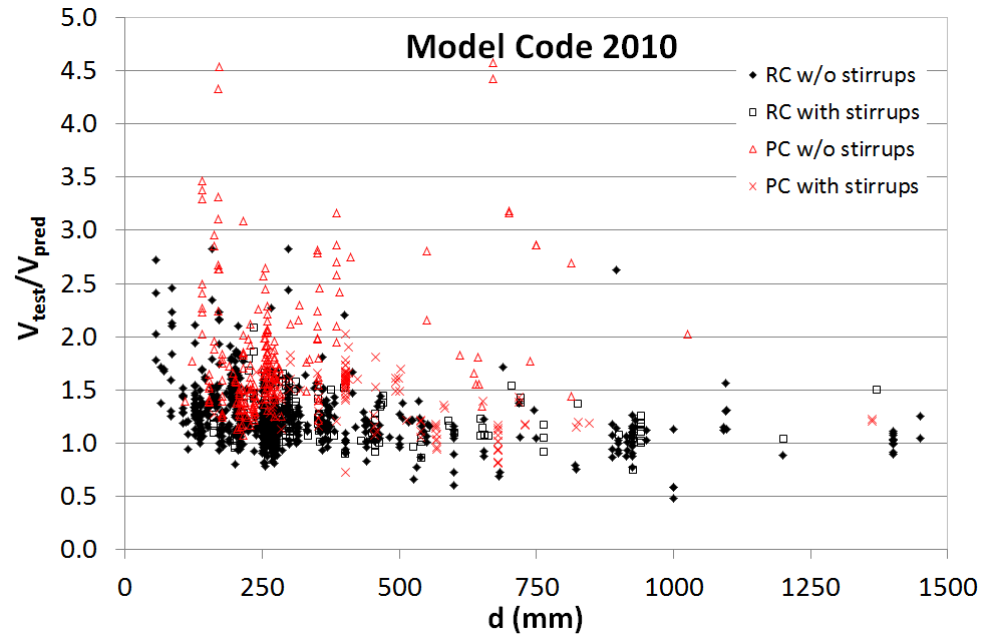
Database original source	No. beams	Code format proposal (Section 4)		ACI318-11		EC-2		MC-2010		CSA A23.3-14	
		Mean	CoV	Mean	CoV	Mean	CoV	Mean	CoV	Mean	CoV
RC beams w/o stirrups [25]	784	1.17	18.5	1.42	38.3	1.10	27.9	1.22	22.8	1.22	22.3
RC beams with stirrups [26]	170	1.16	14.1	1.53	25.2	1.47	26.4	1.28	17.2	1.29	17.3
PC beams w/o stirrups [27]	214	1.21	22.1	1.52	35.1	1.56	29.8	1.85	33.9	1.68	29.8
PC beams with stirrups [27]	117	1.18	16.5	1.28	20.5	1.54	37.2	1.38	19.6	1.40	16.2
All	1285	1.17	18.6	1.44	35.3	1.26	34.1	1.35	31.4	1.33	26.9

*Figura 33 Verificación del modelo propuesto para las diferentes bases de datos. Valores medios y coeficiente de Variación en los resultados. %*

Correlación entre las predicciones y resultados experimentales en función del brazo de la profundidad del brazo de palanca,  $d$ , para 1285 vigas en bases de datos de la ACI.



Correlación entre las predicciones y resultados experimentales en función de la profundidad del eje neutro  $d$ , para 1285 vigas en bases de datos de la ACI.





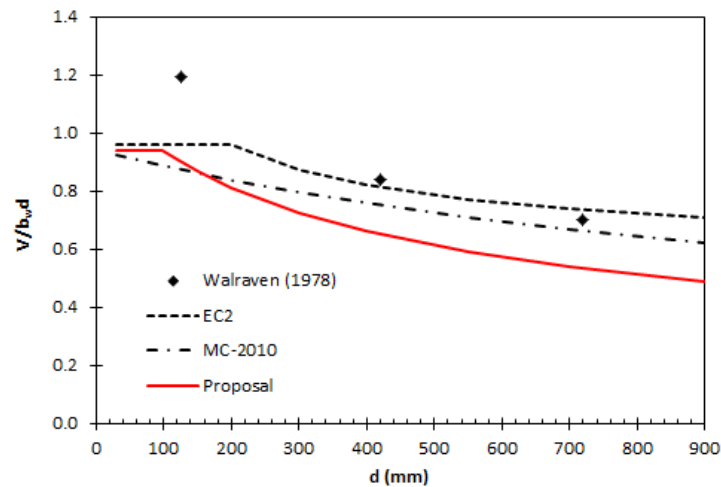


Figura 34 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Efecto Tamaño en Vigas sin Estribos

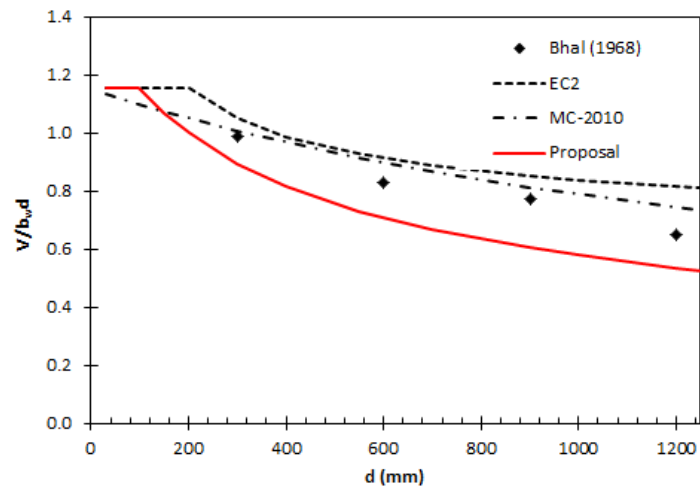


Figura 35 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Efecto tamaño en Vigas sin Estribos

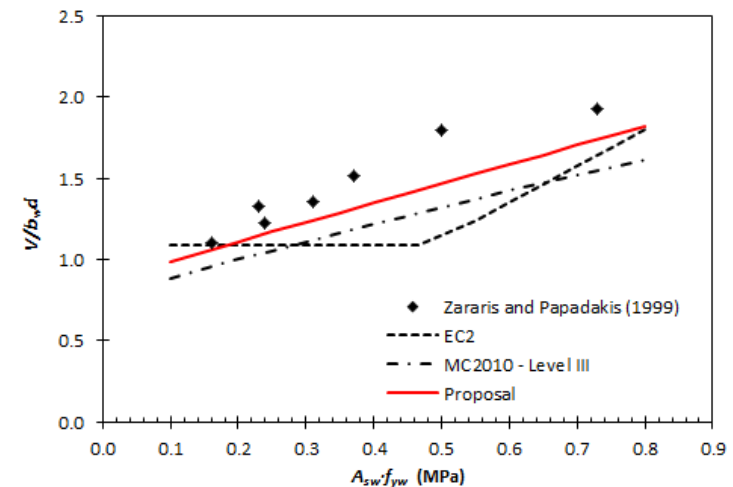


Figura 36 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Influencia del índice de confinamiento de estribos.

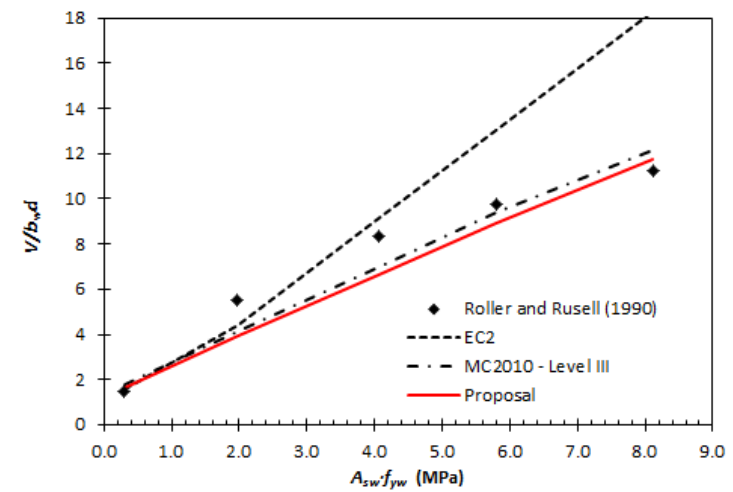


Figura 37 Correlación entre las predicciones y resultados experimentales para vigas de hormigón armado: Influencia del índice de confinamiento de estribos.

### 3. REFUERZO DE RESISTENCIA A CORTANTE MEDIANTE INCREMENTO DE ARMADURA LONGITUDINAL.

#### 3.1 Introducción

Clásicamente, el refuerzo a cortante de estructuras de hormigón se ha basado en aportar armadura transversal adicional, en recrecer el alma de las vigas o en introducir un pretensado vertical.

La aportación de armadura transversal suele hacerse bien realizando taladros e introduciendo armadura o pernos que se adhieren mediante resina epoxi o que se anclan arriba y debajo de la viga mediante sistemas mecánicos. Otras veces se dispone armadura en las caras laterales que se ancla en la cabeza comprimida mediante taladros horizontales y se recubre de hormigón, aumentando así, además, el ancho de la viga. Finalmente, se puede utilizar laminados de fibra de carbono u otros materiales compuestos de polímeros reforzados con fibras (FRP) dispuestos lateralmente o envolviendo la viga, lo cual además de anclar el FRP confina el hormigón (“wrapping”).

Este tipo de refuerzo es muy eficiente estructuralmente porque la armadura transversal es una contribución directa a la resistencia ( $V_s$ ). Sin embargo, adolece de una serie de dificultades y problemas, tanto en la ejecución como en su comportamiento. Resulta difícil anclar las armaduras, se requiere realizar taladros, a veces es imposible acceder a la cara superior de la viga, en caso de refuerzo con FRP es preciso anclarlo mecánicamente para evitar la delaminación, y además es muy caro en la actualidad.

El refuerzo disponiendo pretensado vertical tiene un efecto muy positivo, pues introduce una tensión vertical de compresión que disminuye la tensión principal de tracción, bajo las cargas exteriores y el pretensado introducido. Ello permite aumentar la tensión tangencial sin que se produzca fisuración bajo el estado multiaxial de tensiones que se genera. No obstante, es también complicado de ejecutar, pues se necesitan taladros pasantes y anclajes mecánicos de las barras de pretensado, aparte del uso de gatos hidráulicos y otros elementos asociados a las operaciones de tesado. Alternativamente si los taladros no son pasantes y las barras se anclan por adherencia mediante resina epoxi, la carga de tracción que puede soportar este tipo de anclaje está limitada a la longitud y eficacia del mismo.

Todos estos tipos de refuerzo se basan, además, en considerar que la contribución a la resistencia a cortante del hormigón es debida fundamentalmente al “aggregate interlock” o engranamiento entre las caras de fisuras en el alma de la viga. En otras palabras, se sigue con la mentalidad clásica de la flexión es resistida por las alas (cosa cierta) y el cortante lo resisten las almas, aspecto éste que no es totalmente cierto en hormigón armado.

Sin embargo, como se ha visto en el capítulo anterior, actualmente hay una importante corriente de investigación que ha demostrado que en estado límite último, la aportación de la

cabeza comprimida es esencial, pues el ancho de fisuras en el alma es demasiado grande para transmitir un cortante importante por engranamiento de áridos. Por tanto, si eso es así, todo lo que signifique un aumento de la cabeza comprimida puede incrementar la resistencia a cortante de una piza.

Una forma de aumentar la contribución de la cabeza comprimida es aumentar la profundidad de la fibra neutra,  $x$ , la cual depende de la cuantía de armadura longitudinal. Otra consistiría en introducir un pretensado longitudinal que, al comprimir la viga aumenta " $x$ ". En este trabajo se adopta la solución pasiva, esto es, el aumento de la cuantía longitudinal, el cual se puede hacer disponiendo una chapa de acero en la cara inferior de la viga.

Esta solución es fácil de ejecutar en la práctica, si bien requiere asegurar que no se produce delaminación de la chapa, la cual debe ser bien adherida con suficiente longitud de anclaje o anclada mecánicamente en sus extremos

### 3.2 Descripción de las vigas estudiadas y de su respuesta frente a diversos refuerzos.

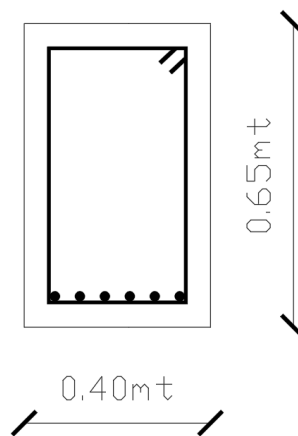
Se trata de una viga simplemente apoyada, de sección rectangular de  $b=0.40$  m,  $h=0.65$  m y  $d=0.60$  m, y de 8 m. de luz, cargada con dos cargas puntuales iguales de 200 kN situadas a 2.0 m de los apoyos ( $a/d=3.33$ ) para que produzca una rotura por cortante y no por flexión. La armadura longitudinal consiste en 6 barras de 20 mm de diámetro y la armadura transversal son cercos de 6 mm de diámetro separados a 150mm. El hormigón es de resistencia  $f_{ck}=25$  MPa y el acero es de resistencia  $f_{yk}=400$  MPa.

Por razones de cambio de uso, la carga puntual aumenta hasta 265 kN, por lo que es necesario reforzar la viga. Se plantean dos tipos de refuerzo, uno disponiendo armadura transversal adicional consistente en barras verticales dispuestas en taladros de diámetro 6mm y separación 150mm, y el otro disponiendo una platabanda de chapa, adherida a la cara inferior de la viga, de  $b=400$  mm espesor = 9mm y acero  $f_{yk}=360$  MPa.

El diseño del refuerzo se realiza mediante el modelo CCCM. Posteriormente se evalúa la capacidad de estas vigas con la Instrucción EHE-08 y finalmente se realiza un análisis no lineal mediante el programa MIDAS-FEA, aumentando las cargas hasta alcanzar la rotura. Estos resultados se comparan con los valores de carga última proporcionados por CCCM (que son las cargas de diseño) y los valores de carga última proporcionados por EHE-08.



*Figura 38 Caso de Estudio: Sección Longitudinal de la Viga*

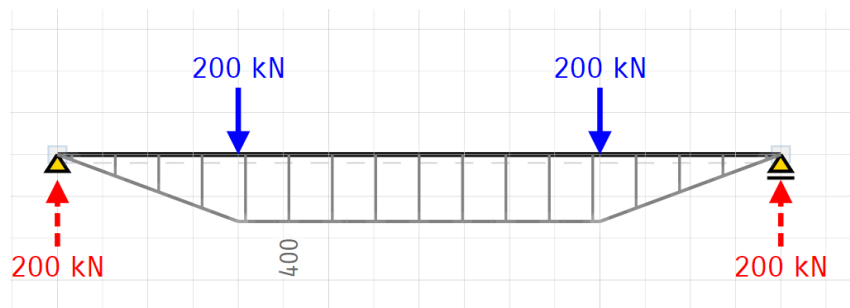


*Figura 39 Caso de Estudio: Sección Transversal del Elemento*

Para dos Casos de Cargas Puntuales:

Caso 1:  $\text{Cargas de } 200\text{kN} = \begin{cases} Mf = 400\text{kN} \cdot \text{m} \\ Vd = 200\text{kN} \end{cases}$

Caso 2:  $\text{Cargas de } 265\text{kN} = \begin{cases} Mf = 530\text{kN} \cdot \text{m} \\ Vd = 265\text{kN} \end{cases}$



*Figura 40 Diagrama de Momentos Caso 1*

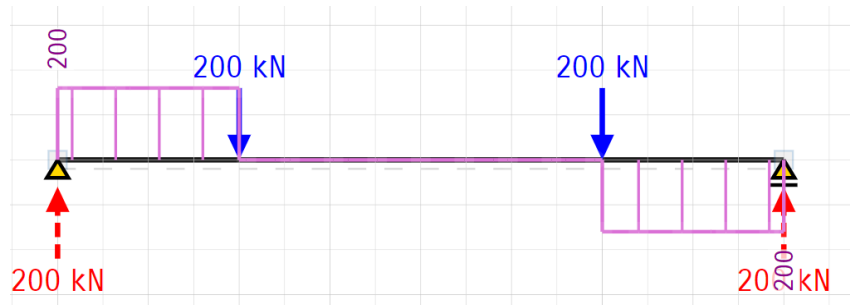


Figura 41 Diagrama de Esfuerzo Cortante Caso 1

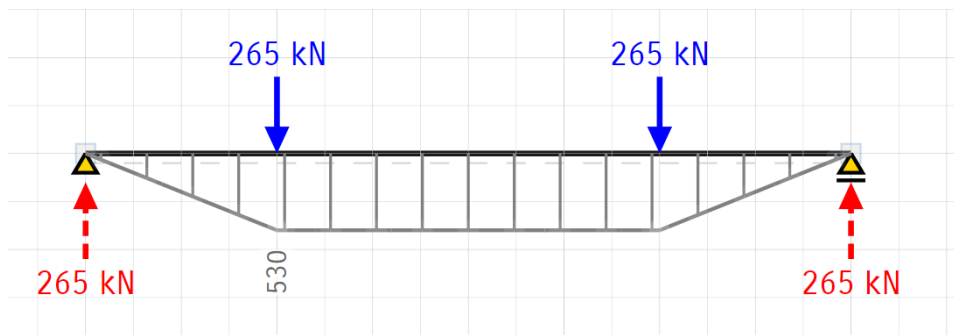


Figura 42 Diagrama de Momentos Caso 2

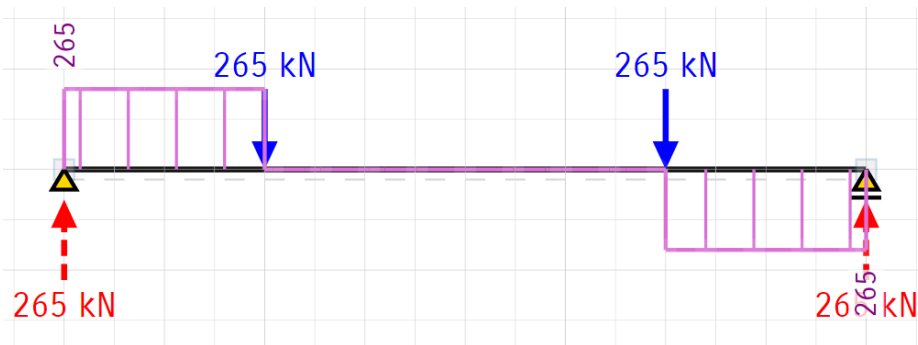


Figura 43 Diagrama de Esfuerzo Cortante Caso 2

Definimos 3 escenarios distintos:

- 1) Diseño Ante Solicitaciones de Uso Normales. (Caso 1)
- 2) Cambio de Uso (Caso 2): Adicionando Barras Acero a la Sección, es decir  $\Delta A_{st}$  si  $\Delta A_{sc}=0$ .
- 3) Cambio de Uso: Refuerzo de Chapa Metálica Longitudinal adicional Como Contribución al Refuerzo.  $\Delta A_{st} + \Delta A_{sc} = \Delta V + V$

Datos de Cálculo:

Propiedades Geométricas		
Elemento	Dimensión	Ud.
Base	0.4	mts.
Altura	0.65	mts.
Longitud	8	mts.
Recubrimiento	0.05	mts.
D	0.6	mts.

Propiedades Mecánicas		
$f'_{ck}$	25	Mpa [N/mm <sup>2</sup> ]
$f_y$	400	Mpa [N/mm <sup>2</sup> ]
Es Acero	200000	
$f_{ct}$	2.56	Mpa [N/mm <sup>2</sup> ]
$f_{cm}$	33.00	Mpa [N/mm <sup>2</sup> ]
$E_c$ Hormigón	31475.81	Mpa [N/mm <sup>2</sup> ]
N	6.35	

Resistencia a la tensión del hormigón:

$$f'_{ck} = 25 \text{ Mpa}$$

$$f_{ct} = 0.3 * \sqrt[3]{f'_{ck}} \leq 4.6 \text{ Mpa}$$

$$f_{ct} = 0.3 * \sqrt[3]{25^2} = 2.56 \text{ Mpa}$$

Resistencia media a compresión del hormigón:

$$f_{cm} = f'_{ck} + \frac{8N}{mm^2} = 25 + 8 = 33 \text{ Mpa}$$

Módulo de elasticidad secante del hormigón de acuerdo al Euro código 2:

$$E_c = 22000 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3}$$

$$E_c = 22000 * \left( \frac{33}{10} \right)^{0.3} = 31475.8$$

Coefficiente de equivalencia entre el acero y hormigón:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200000}{31475} = 6.35$$

Cargas Aplicadas		
Puntuales	200	Kn
Md	400	Kn*m
Vd	200	Kn

### 3.3 Refuerzo a Cortante empleando el método CCCM.

#### 3.3.1 Diseño Ante Solicitaciones de Uso Normales.

Diseño a Flexión:

Eje neutro de viga armada:

$$\frac{x}{d} = n\rho_l * \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho_l}} \right) \approx 0.75 * (n\rho)^{\frac{1}{3}}$$

Coeficiente de equivalencia:

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

Fórmula aproximada a flexión:

$$M_u = A_s * f_y * 0.9 * d$$

$$A_s = \frac{400kN * m}{400 * (0.9) * (0.6)} = 1851mm^2$$

As Real

Diámetro de Barra [mm]	6	8	10	12	14	16	20	25	32
Área de Barra [mm <sup>2</sup> ]	28	50	78	113	153	201	314	490	804

$$\approx 6\emptyset 20mm = 1885mm^2 \text{ Acero Longitudinal}$$

Cuantía longitudinal de acero en la sección:

$$\rho_l = \frac{1885mm^2}{400mm * 600mm} = 0.00785$$

Formula aproximada del eje neutro de viga:

$$\frac{x}{d} = 0.75(n\rho_l)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x}{d} = 0.75(0.368) \rightarrow x = 0.276 * 0.6 = 0.165$$

$$\frac{a}{d} = \frac{l/4}{0.6} = \frac{8}{4 * 0.6} = 3.33$$

Efecto de engranamiento de Áridos:

$$\xi = \frac{2}{\left(\frac{a}{d}\right)^{0.2} * \sqrt{1 + \frac{d_0[mm]}{200}}} = \frac{2}{(3.33)^{0.2} \sqrt{1 + \frac{600mm}{200mm}}} = 0.7861 > 0.45 \text{ OK!}$$

Aporte de la cabeza de hormigón a la resistencia a cortante:

$$V_{cu} = \xi * \frac{x}{d} * f_{ct} * b * d = 0.7861 * 0.276 * 2560 * 0.4 * 0.6 = 133.3kN$$

Aporte a requerirse por las Barras transversales Acero (Estribos):

$$V_{su} = V_d - V_{cu} = 200kN - 130kN = 70kN$$

$$V_{su} = 0.9 * \frac{A_{st} * f_y * d}{S_t}$$

$$A_{st} = \frac{V_{su} * S_t}{f_y * 0.9 * d} = \frac{70000N}{400Mpa * 0.9 * 600mm} = \frac{0.324mm^2}{m} = \frac{324mm^2}{mL}$$

As Real

Diámetro de Barra [mm]	6	8	10	12	14	16	20	25	32
Área de Barra [mm <sup>2</sup> ]	28	50	78	113	153	201	314	490	804

$$2\emptyset 6mm \text{ Cerco} = 2x28.27mm^2 = 56.54mm^2 (Una Barra)$$

$$x6 = \frac{339.24mm^2}{mL} \text{ OK}$$

$\emptyset 6MM@150mm$

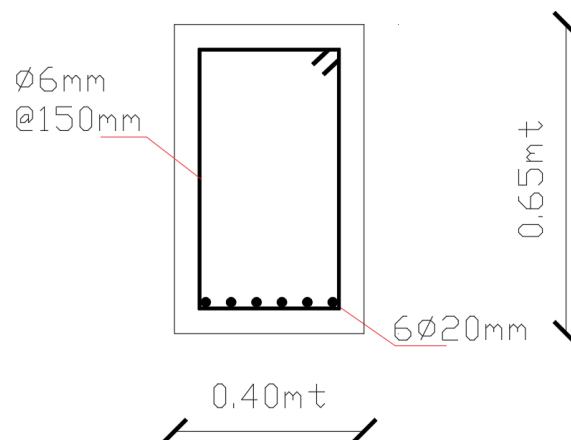


Figura 44 Detalle de Refuerzo Caso 1



### 3.3.2 Cambio de Uso: Adicionando Barras Acero a la Sección, es decir $\Delta A_{st}$ si $\Delta A_{sc}=0$ .

De 200kN @ 265kN de cargas puntuales:

Nuevo esfuerzo a cortante:

$$V_d = 265kN$$

$$\Delta V = 65kN$$

$$\Delta V_{su} = 265kN - 130kN \\ = 135kN \text{ Nueva fuerza a cortante a resistir por el acero.}$$

$$V_{su} = \frac{0.9 * A_{st} * f_{yd}}{S_t}$$

$$A_{st} = \frac{V_{su} * S_t}{f_y * 0.9 * d} = \frac{135000N}{400Mpa * 0.9 * 600mm} = \frac{0.625mm^2}{mm} = 625mm^2/ml$$

Por lo que

$$\Delta V = 65kN \rightarrow \frac{\Delta A_{st}}{S_t} \rightarrow (625mm^2 - 324mm^2) = \frac{301mm^2}{ml}$$

As Real

Diámetro de Barra [mm]	6	8	10	12	14	16	20	25	32
Área de Barra [mm <sup>2</sup> ]	28	50	78	113	153	201	314	490	804

Es necesario a utilizar,

**$\varnothing 6mm$  exterior adicionales repartidos @ 15cm por metro  
= 6 en total x metro.**

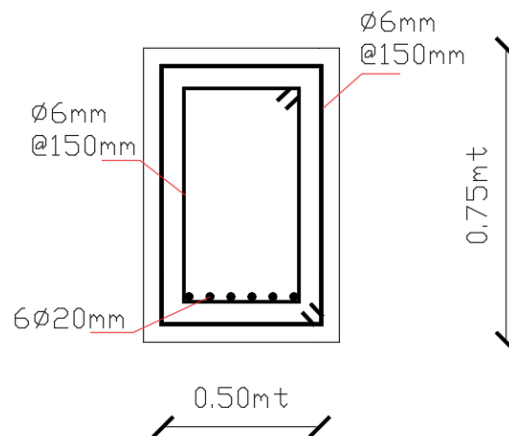
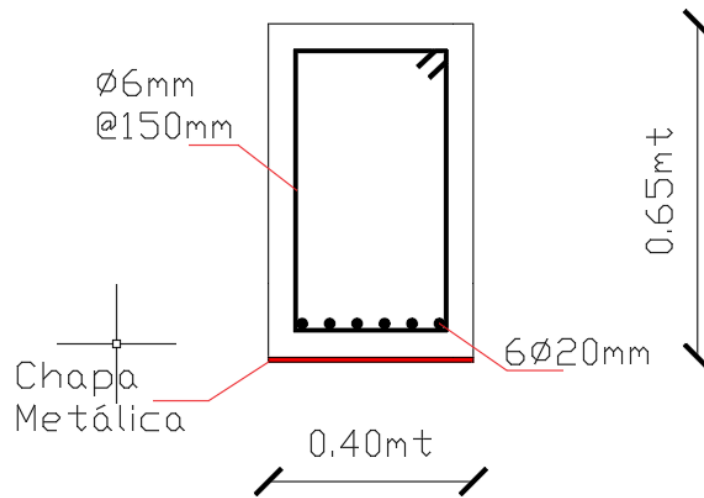


Figura 45 Detalle de Refuerzo Caso 2

### 3.3.3 Cambio de Uso: Colocando Chapa Metálica Longitudinal adicional Como Contribución al Refuerzo. $\Delta A_{st} + \Delta A_{sc} = \Delta V + V$

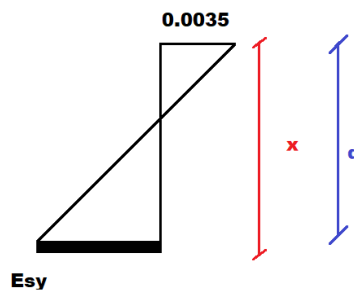


Manteniendo el acero de refuerzo transversal original, es decir,  $\Delta A_{sc}$  si  $\Delta A_{st} = 0$

$$V_{su} = 70 \text{ kN}$$

$$V_{cu} = ?$$

Para una sección de hormigón transversal armado tenemos:



Despejando  $x_{lim}$

$$\frac{\epsilon_{cu}(\text{Deformacion Ultima Hormigon})}{x} = \frac{E_{sy}}{d - x}$$

$$\frac{0.0035}{x} = \frac{E_{sy}}{d - x}$$

$$\frac{d-x}{x} = \frac{E_{sy}}{0.0035}$$

$$\frac{d}{x} = 1 + \frac{E_{sy}}{0.0035}$$

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + \frac{E_{sy}}{0.0035}}$$

$$y_{lim} = \frac{0.8d}{1 + \frac{E_{sy}}{0.0035}}$$

$$C = f_{cd} * b * y_{lim} = f_{cd} * b * d * \frac{0.8}{1 + \frac{0.0018}{0.0035}}$$

Para simplificar, hacemos  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{0.8}{1 + \frac{0.0018}{0.0035}} = 0.528$$

Y como tracción debe ser igual que compresión:

$$T = C = f_{cd} * b * d * \alpha$$

Tracción del Acero + Tracción de la Placa = Sección en Compresión

$$As_0 * f_{yd} + \Delta A_s * \sigma_y^* = f_{cd} * b * d * \alpha$$

Contribución del Acero + Contribución de la Chapa =  $\alpha$

$$\frac{As_0 * f_{yd}}{f_{cd} * b * d} + \frac{\Delta A_s * \sigma_{sy}^*}{f_{cd} * b * d} = \alpha$$

Haciendo  $W_0$  el primer termino de las barras, y  $W^*$  el segundo término de la chapa tenemos:

$$W_0 = \frac{As_0 * f_{yd}}{f_{cd} * b * d}$$

$$W^* = \frac{\Delta A_s * \sigma_{sy}^*}{f_{cd} * b * d}$$

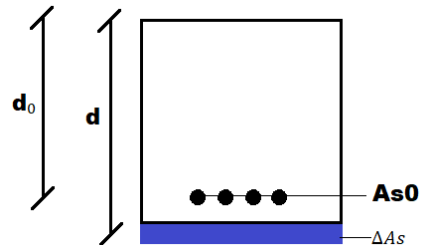
$$w^* = \alpha - W_0$$

Para chapa de acero con:

$$\sigma_{sy}^* = 3600 \text{ Mpa}$$

$$E_{sy} = \frac{3600}{200000} = 0.0018$$

$$w^* \leq 0.528 - W_0$$



Brazo de Palanca Nuevo

$$d = \frac{As_0 * d_0 + \Delta As * d_1}{As_0 + \Delta A_s}$$

Formula de Cuantía de Acero en Sección transversal:

$$\rho = \frac{As_0 + \Delta As}{b * d} = \frac{(\Delta As_0 + \Delta As)^2}{b * (As_0 d_0 + \Delta A_s * d_s)}$$

Formula de Flexión – Eje Neutro

$$n\rho + \frac{x}{d} = n\rho \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right)$$

Formula de Flexión Aproximada

$$\frac{x}{d} = 0.75 * (n\rho)^{\frac{1}{3}}$$

Resistencia a Cortante: Aporte de Cabeza de Compresión

$$V_{cu} = \xi * \frac{x}{d} * f_{ct} * b * d$$

$$\frac{V_{cu}}{f_{ct} * b * d} = \xi * \frac{x}{d}$$

Coeficiente de equivalencia entre el acero y hormigón:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200000}{31475} = 6.35$$

Para el Primer caso:  $\left\{ \begin{matrix} M_d = 400 \\ V_d = 200 \end{matrix} \right\}$   $A_{sl} \text{ Original} = \frac{1885mm^2}{ml}$   
 $A_{st} \text{ Original} = \frac{324mm^2}{ml}$

Ahora veremos cuanto es lo máximo que puedo aumentar la capacidad a flexión y que  $\Delta V$  logramos al agregar una chapa de acero.

$$\text{Máxima capacidad a flexión} \rightarrow W_{max} = \frac{0.8}{1 + \frac{\epsilon_{sy}}{\epsilon_{cu}}} = \frac{0.8}{1 + \frac{0.0018}{0.0015}} = 0.528$$

Usamos chapa de acero tipo

$$\sigma_{sy} = 3600 \text{ Mpa}$$

$$\epsilon_{sy} = 0.0018$$

Incluimos el aporte de la chapa a la sumatoria:

$$\frac{A_{s0} * f_{yd} + \Delta A_s * \sigma_{sy}}{f_{cd} * b * d} = 0.528$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5} = \frac{25000}{1.5} = 16667 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y * \Delta A_s = 0.528 * (16667 * 0.4 * 0.6) - 1886 * 10^{-6} * 435000$$

Por lo que, el área de chapa de acero necesaria es de:

$$\Delta A_s = 0.00358787m^2 = 3587.86mm^2 \text{ de chapa de acero} = \text{Espesor de chapa para } 40cm = 8.96965mm$$

$$C = f_{cd} * b * 0.528 * d = 2111.9 \text{ kN}$$

$$A_s * f_{yd} + \Delta A_s * \sigma_{sy} = 1886 * 0.935 + 3587.9 * 0.36 = 2112.05$$

¿Cuánto hemos reforzado a cortante?

Calculando nuevo d:

$$d = \frac{A_{s0} * d_0 + \Delta A_s * d_1}{A_0 + \Delta A_1} = \frac{1886 * 600 + 3588 * 650}{1886 + 3588} = 632mm$$

Cuantía de la sección:

$$\rho_l = \frac{A_s + \Delta A_s}{b * d} = \frac{5474}{400mm * 632mm} = 0.02163$$

$$n = 6.35$$

$$n * p_l = 0.1374$$

$$\frac{x}{d} = 0.75 * (np)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x}{d} = 0.3869$$

Calculando nueva resistencia a cortante de la sección

$$V_{cu} = \xi * \frac{x}{d} * f_{ct} * b * d = 0.786 * 0.3869 * 2560 * 0.4 * 0.63 = 196.18 kN$$

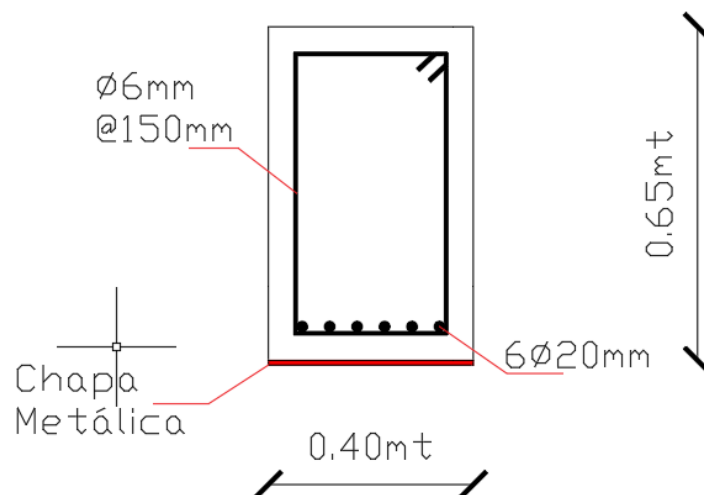


Figura 46 Detalle de Refuerzo Caso 3

### 3.4 Predicción de la resistencia a cortante de las vigas mediante EHE-08.

Luego de obtener los cálculos de refuerzo por el CCCM, procedemos a utilizar dichas áreas de refuerzo para determinar la resistencia ultima que podrían soportar hasta rotura.

Contribución del Bloque de Compresión 
$$V_{cu} = \frac{0,15}{\gamma_c} \xi (100 \rho_l f_{ck})^{\frac{1}{3}} b_0 d$$

Contribución del Acero de Refuerzo Transversal 
$$V_{su} = \frac{0.9}{S_t} * d * A_t * f_{yd}$$

$$V_u = V_{cu} + V_{su}$$

Donde:

$V_{cu}$  = *Contribución por la Cabeza de Compresión*

$V_{su}$  = *Contribución del Acero Transversal*

$\gamma_c$  = *Coeficiente de Reducción del Hormigón* = 1.5 Para todos los casos

$\xi$  = *Efecto de engranamiento de Aridos*

$\rho_l$  = *Cuantía Longitudinal*

$f_{ck}$  = *Resistencia a compresión Característica*

$b_0$  = *Ancho de Seccion de Viga*

$d$  = *Brazo de Palanca*

$S_t$  = *Separacion del Acero de Refuerzo*

$A_t$  = *Area de Refuerzo Transversal*

Para el Primer caso V1:  $\{V_d = \}$

$$A_{sl} \text{ Original} = \frac{1851mm^2}{ml}$$

$$A_{st} \text{ Original} = \frac{324mm^2}{ml}$$

$$V_{cu} = \frac{0,15}{\gamma_c} \xi (100 \rho_l f_{ck})^{\frac{1}{3}} b_0 d$$

$$V_{su} = \frac{0.9}{S_t} * d * A_t * f_{yd}$$

$$V_u = V_{cu} + V_{su}$$

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{600mm}} = 1.57 < 2 \text{ OK}$$

$$V_{cu} = \frac{0.15}{1.5} * 1.57 * \left(100 * \frac{1851}{400 * 600} * 25\right)^{\frac{1}{3}} * 400 * 600$$

$$V_{cu} = 0.1 * 1.57 * \left((100 * 0.0077125 * 25Mpa)^{\frac{1}{3}}\right) * 400 * 600$$

$$V_{cu} = 101,03kN$$

$$V_{su} = 0.9 * 600 * \frac{324mm^2}{1000mm} * 400Mpa = 69.98kN = 70kN$$

Por lo que,

$$V_u = V_{cu} + V_{su}$$

$$V_u = 101kN + 70kN = 171kN$$



Para el Segundo Caso V2: Con Refuerzo  $\{V_d = \}$

$$A_{sl} \text{ Total} = \frac{1854mm^2}{ml}$$

$$A_{st} \text{ Total} = \frac{625mm^2}{ml}$$

$$V_{cu} = \frac{0,15}{\gamma_c} \xi (100 \rho_l f_{ck})^{\frac{1}{3}} b_0 d$$

$$V_{su} = \frac{0.9}{S_t} * d * A_t * f_{yd}$$

$$V_u = V_{cu} + V_{su}$$

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{600mm}} = 1.57 < 2 \text{ OK}$$

$$V_{cu} = \frac{0.15}{1.5} * 1.57 * \left(100 * \frac{1851}{400 * 600} * 25\right)^{\frac{1}{3}} * 400 * 600$$

$$V_{cu} = 0.1 * 1.57 * \left((100 * 0.0077125 * 25Mpa)^{\frac{1}{3}}\right) * 400 * 600$$

$$V_{cu} = 101,03kN$$

$$V_{su} = 0.9 * 600 * \frac{625mm^2}{1000mm} * 400Mpa = 135kN$$

Por lo que,

$$V_u = V_{cu} + V_{su}$$

$$V_u = 101kN + 135kN = 236kN$$

Para el Tercer Caso V3 con Placa:  $\{V_d = \}$

$$A_{sl} \text{ Total} = \frac{1885+3587=5472mm^2}{ml}$$

$$A_{st} \text{ Original} = \frac{324mm^2}{ml}$$

$$d = 632$$

$$V_{cu} = \frac{0,15}{\gamma_c} \xi (100 \rho_l f_{ck})^{\frac{1}{3}} b_0 d$$

$$V_{su} = \frac{0.9}{S_t} * d * A_t * f_{yd}$$

$$V_u = V_{cu} + V_{su}$$

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{632mm}} = 1.562 < 2 \text{ OK}$$

$$V_{cu} = \frac{0.15}{1.5} * 1.562 * \left(100 * \frac{5472}{400 * 600} * 25\right)^{\frac{1}{3}} * 400 * 600$$

$$V_{cu} = 0.1 * 1.57 * \left((100 * 0.0228 * 25Mpa)^{\frac{1}{3}}\right) * 400 * 600$$

$$V_{cu} = 145,03kN$$

$$V_{su} = 0.9 * 632 * \frac{324mm^2}{1000mm} * 400Mpa = 73.7kN$$

Por lo que,

$$V_u = V_{cu} + V_{su}$$

$$V_u = 145,03kN + 73kN = 218kN$$

## 3.5 Simulación Numérica: Midas FEA

### 3.5.1 Breve descripción del programa midas FEA

El programa de elementos finitos Midas-FEA (Finite Element Analysis) es utilizado para el análisis con modelización numérica, de elementos de hormigón armado al ser sometidos a carga.

Midas-Fea es un software de gran utilidad que define un nuevo paradigma para el análisis avanzado no lineal y análisis detallado para aplicaciones de ingeniería estructural.

Las capacidades exclusivas de midas FEA permiten que se pueda modelar estructuras complejas de placas y elementos sólidos de manera eficiente en vez de simplificar un modelo usando elementos en una sola dimensión o 2D. Con Midas FEA podemos realizar análisis para elementos en regiones particulares, y obtener resultados altamente precisos para los proyectos que lo requieran.

Midas FEA está fundado en la experiencia del modelado de geometrías, generación de malla automática, gráficos contemporáneos y tecnologías de análisis.

También dispone una amplia gama de elementos y materiales. Es Ideal para complejas simulaciones y el diseño de detalles. Incluye materiales para la simulación de la fisuración y el agotamiento a compresión del hormigón, modelos de interfaces para simulación de la adherencia entre armaduras y hormigón.

Dentro de sus características se encuentran:

- Análisis estático lineal donde existen múltiples casos y combinaciones de carga con control de salida (datos, nodo, elemento),
- Análisis de construcción por etapas con definición de etapas,
- Análisis modal,
- Análisis de pandeo lineal,
- Análisis transitorio/espectro de respuesta,
- Análisis de calor por hidratación,
- Análisis no lineal geométrico/material,
- Análisis no lineal de interface,
- Análisis de reforzamiento,
- Análisis de agrietamiento del hormigón,
- Análisis de contacto y
- Análisis de fatiga

Además, genera automáticamente un reporte de datos y graficas personalizables compatibles con herramientas de uso cotidiano como MS-Excel/Word.

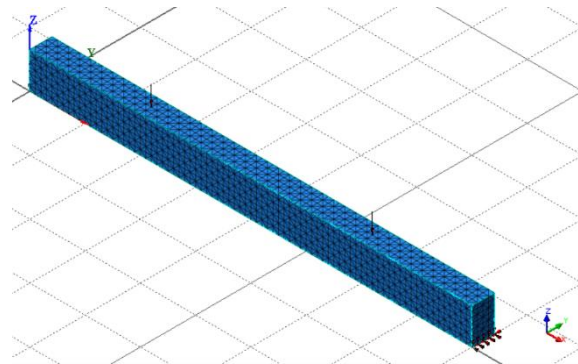
Los pasos que agrupa el programa Midas FEA son:

- Etapa del pre proceso (modelación de la geometría y generación de la malla de elementos finitos)
- Etapa del proceso (FEM solver)
- Etapa del Post Proceso (datos de salida y generación de reporte).

### 3.5.2 Descripción del Modelo Numérico:

#### 3.5.2.1 TIPO DE ELEMENTO

La simulación de ensayos ha sido hecha mediante un modelo no lineal de elementos finitos cuadriláteros, triangulares, con tres, o más nodos en sólidos 3D bajo el concepto de que existen componentes de la tensión en la dirección fuera del plano.



*Figura 47 Tipo de Elemento utilizado en Midas-FEA*

#### 3.5.2.2 Ecuaciones Constitutivas No Lineales de Los Materiales

Para el Hormigón:

Hormigón	Isotrópico
Dato	Valor
Modulo Elástico	30471 N/mm <sup>2</sup>
Coeficiente de Poisson	0.2
Densidad	2.3536e-005 kN/cm <sup>3</sup>
Modelo de Fisura	Total Strain Crack
Efecto Lateral de Fisura	Vecchio and Collins
Efecto Confinamiento	None
Propiedades Básicas	Entrada Directa
Función de Tensión	Exponencial
Función de Compresión	Thorenfeldt
Función de Cortante	Shear Retention

El modelo del hormigón está basado en un modelo constitutivo de deformación total de grieta rotante (Total Strain Rotating Crack Model),

### Material de Acero

Acero Refuerzo		Isotrópico	
Dato		Valor	
Modulo Elástico		200000 N/mm <sup>2</sup>	
Coeficiente de Poisson		0.15	
Densidad		7.698e-005 kN/cm <sup>3</sup>	
Modelo de Fisura		Von Mises	
Yield Stress		400 N/mm <sup>2</sup>	
Hardening/Softening		None	

Chapa Metálica		Isotrópico	
Dato		Valor	
Modulo Elástico		205000 N/mm <sup>2</sup>	
Coeficiente de Poisson		0.15	
Densidad		7.698e-005 kN/cm <sup>3</sup>	
Modelo de Fisura		Von Mises	
Yield Stress		360 N/mm <sup>2</sup>	
Hardening/Softening		None	

El modelo de las barras de armadura longitudinal, transversal y la chapa metálica se basan en el modelo constitutivo del tipo de Von Mises

### 3.5.2.3 Condiciones de Contorno

Para mantener la estructura en equilibrio isostático, se ha restringido el desplazamiento vertical y horizontal en el apoyo del extremo derecho y en el otro apoyo se ha restringido solo el desplazamiento vertical.

### 3.5.3 Calculo Iterativo Midas-FEA

Para determinar el estado de equilibrio, no solo hacemos los problemas discretos en el espacio (con elementos finitos), sino también en tiempo (con incrementos fraccionados de la carga a aplicar). Para alcanzar el equilibrio al final de cada incremento, podemos utilizar un algoritmo de solución iterativa.

Los métodos para realizar este procedimiento interactivo que están disponibles en MIDAS-FEA son el método de Newton-Raphson, la rigidez inicial (Initial Stiffness), el método de Newton Raphson modificado y el método de longitud arco (Arc-Length).

## Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson Regular produce una característica de convergencia cuadrática, el método converge al final de la solución dentro de unas pocas iteraciones. Una desventaja del método es que la matriz de rigidez tiene que ser establecida en cada iteración.

Por otra parte, la convergencia cuadrática sólo se garantiza si se utiliza una matriz de rigidez correcta y si la predicción ya está en la vecindad de la solución final. Si la predicción inicial está muy alejada de la solución final, el método falla fácilmente para converger.

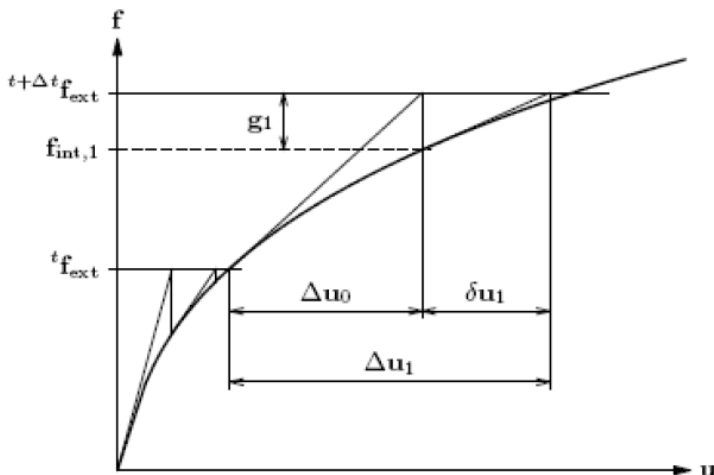


Figura 48 Método de Newton-Raphson

### 3.5.4 Incrementos de Carga

#### 3.5.4.1 Análisis estructural por etapas

Para nuestro modelo de estudio, se han realizado tres casos de vigas ante refuerzos completamente diferentes, aplicando fracciones de carga hasta llegar a la rotura y obtener el cortante máximo resistido por la sección.

#### 3.5.4.2 Criterios de convergencia

En la primera etapa de la aplicación de estas cargas se utiliza el método de Newton-Raphson con un máximo de 30 pasos de carga. Como criterio de convergencia, se seleccionó la Norma Energética al 0.001 y con iteraciones ilimitadas hasta satisfacer la convergencia.

### 3.6 Comparativa Numérico-Experimental

#### Comparativa de Modelos Esfuerzo a Cortante Ultimo

Comparación de Resultados Esfuerzo Cortante Ultimo					
Nomenclatura	Ultimo Rotura [kN]	Vu CCCM [kN]	Vu CCCM [kN]/Vu Rotura	Vu EHE [kN]	Vu EHE [kN]/Vu Rotura
V1	200.00	200	100%	171	86%
V2	240	265	110%	236	98%
V3	252	266.18	105%	218	72%

Comparación de Resultados Aportes de Resistencia por Elemento				
Nomenclatura	CCCM Vcu [kN]	EHE-08 Vcu [kN]	CCCM Vsu [kN]	EHE-08 Vsu [kN]
V1	133	101	70	70
V2	133	101	135	135
V3	196.18	145	70	73

### 3.7 Resumen Resultados Modelación Numérica Midas-FEA

Realizada la modelización numérica realizada en Midas, podemos extraer los siguientes datos:

- Curvas Carga-Desplazamiento
- Mapa de desplazamiento de las vigas en situación de rotura
- Patrones de Fisuración en Rotura
- Tensiones en las Armaduras Longitudinales y Transversales
- Estado Tensional de los Elementos

A partir de estos datos, junto con los calculados manualmente, podemos comprobar la validez de los diversos refuerzos y llegar a una serie de ideas importantes.

- Ideas importantes:

1. Las rigideces fisuradas dependen de las cuantías de armaduras existentes en cada viga de hormigón. Es decir, debido a que la Viga 1 tiene menos acero que las otras dos vigas, es la que posee entonces menos rigidez fisurada de todas.

2. Debido a que para recubrir el acero adicional de estribos de refuerzo en la Viga 2 es necesario aumentar un poco la sección de hormigón (+44% de área), provoca un crecimiento en el momento de fisuración con respecto a la viga original V1.
3. La viga V3 es la que posee la rigidez fisurada más alta de las 3 vigas. Esto ocurre debido a que la posición de la fibra neutra en ella es menor que las demás, provocando que la viga 3 sea más profunda y tenga menos deformación.
4. Debido a que las vigas V1 y V2 poseen menos armadura longitudinal a flexión que en la reforzada con chapa metálica V3, la respuesta de las vigas V1 y V2 serán menos rígida, y se podrán deformar más al ser sometidas a carga.

5. Tanto la Viga 1 como la Viga 2 poseen un valor de deformación última muy similar:

Esto ocurre debido a que aunque la Viga 2 posee más acero de refuerzo adicional y sección transversal, también es sometida a un 60% más de carga, y posee más inercia fisurada por el incremento de brazo de palanca “d”

6. Las gráficas curva desplazamiento evidencian una rotura frágil por cortante para los 3 casos diferentes estudiados, sin ductilidad ante cargas últimas. Este tipo de comportamiento es el habitual para las fallas a cortante, lo que las convierte en peligrosas, y es una de las razones por las cuales es difícil de desarrollar un modelo que reproduzca el comportamiento con destreza a cabalidad.



## Curvas Carga - Desplazamiento

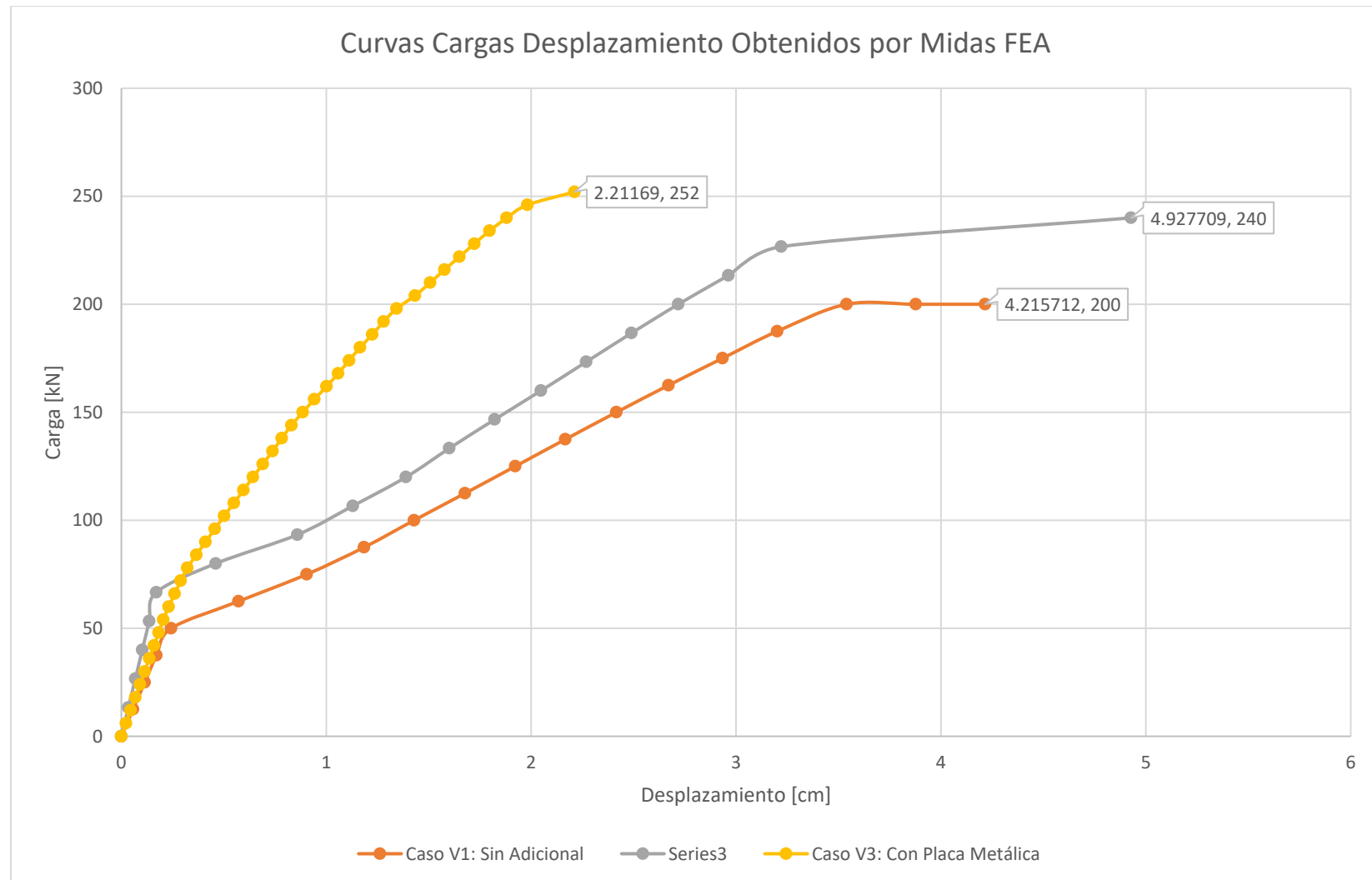


Figura 49 Curvas Carga Desplazamiento de Vigas Simuladas

A continuación presentamos las curvas Carga-Desplazamiento de las tres vigas con sus valores particulares. En los anexos se incluyen las tablas con los valores para consulta.

Modelado mediante Software MIDAS de elementos Finitos Caso 1: Viga Original

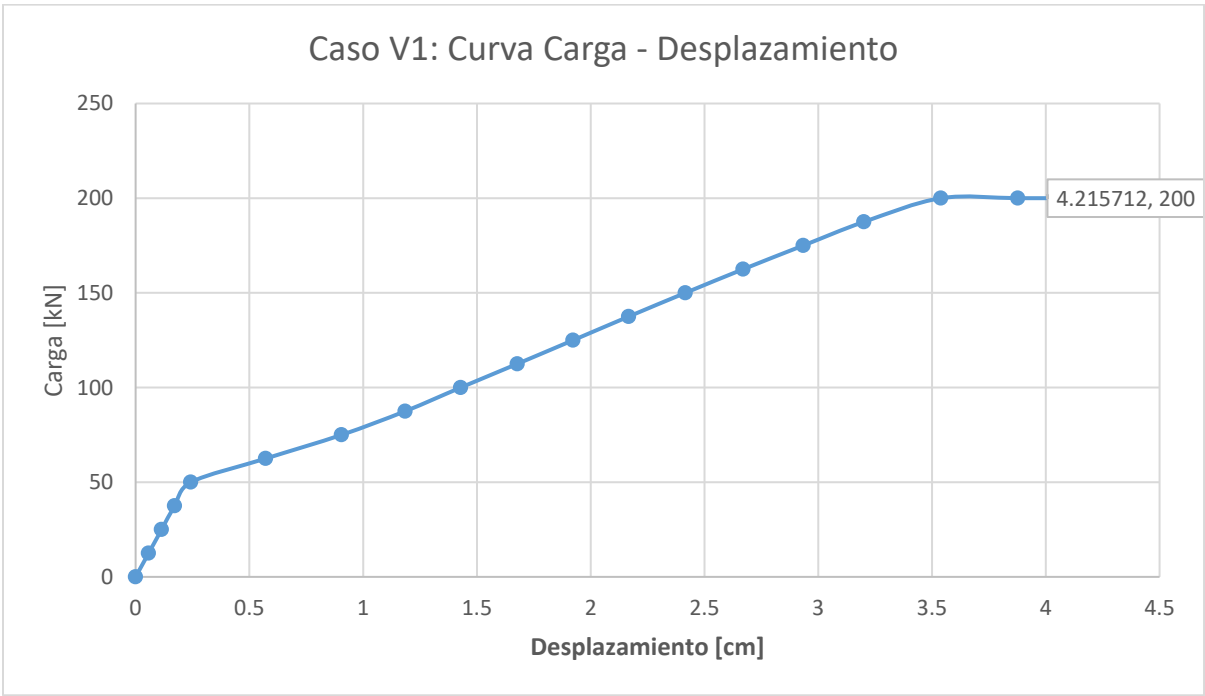


Figura 50 Curva Carga Desplazamiento de Vigas V1

Modelado Mediante Software MIDAS de Elementos Finitos Caso 2: Viga Reforzada con Estribos

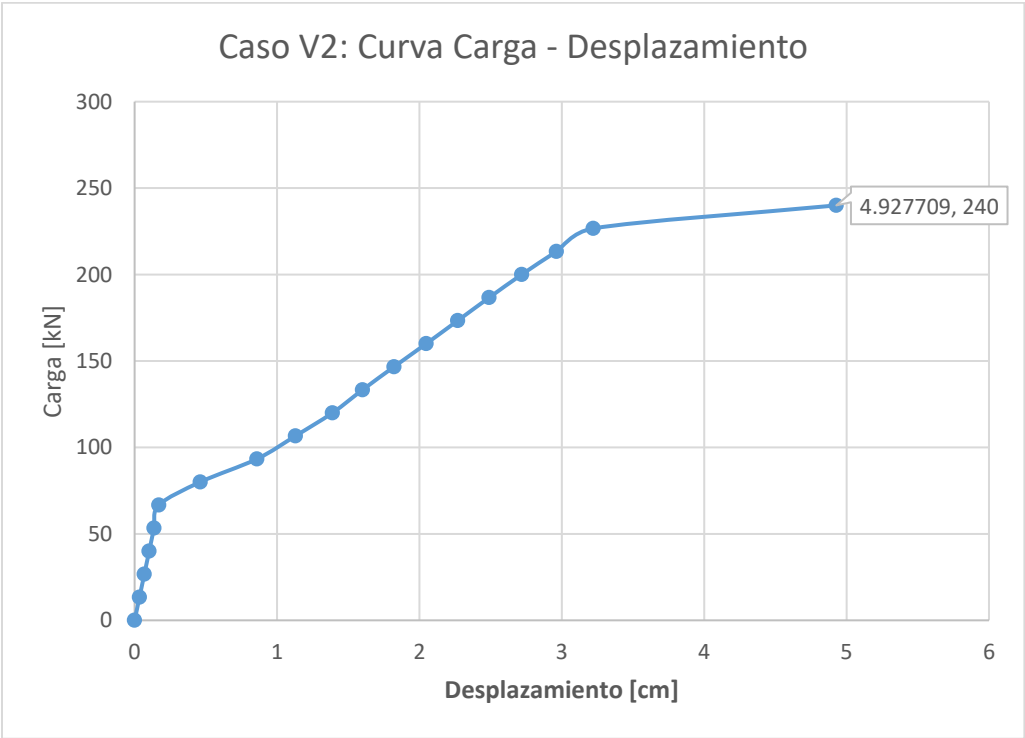


Figura 51 Curva Carga Desplazamiento de Vigas V2

Modelado Mediante Software MIDAS de Elementos Finitos Caso 3: Viga Reforzada con Placa Metálica

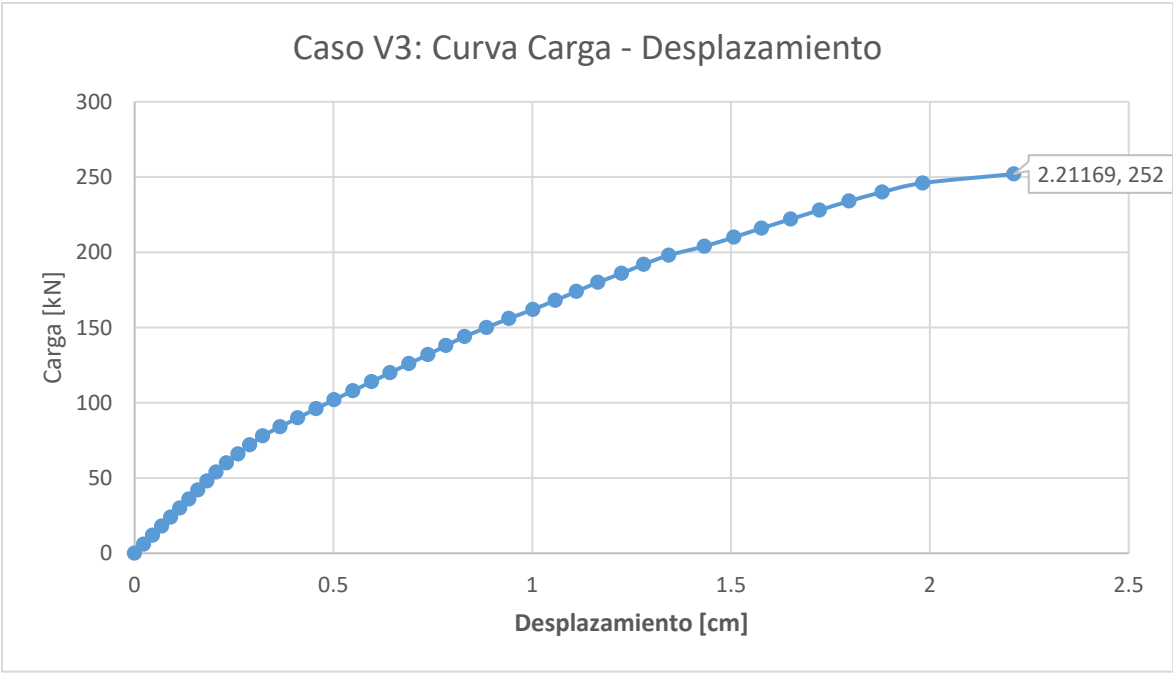


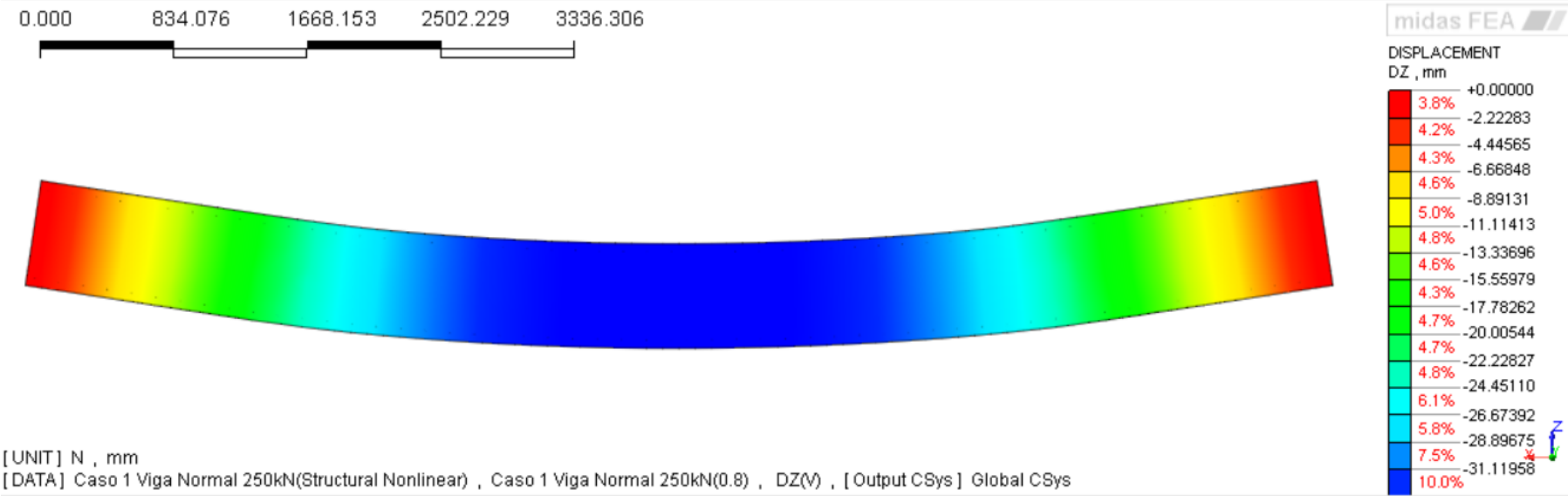
Figura 52 Curva Carga Desplazamiento de Viga V3

Desplazamientos

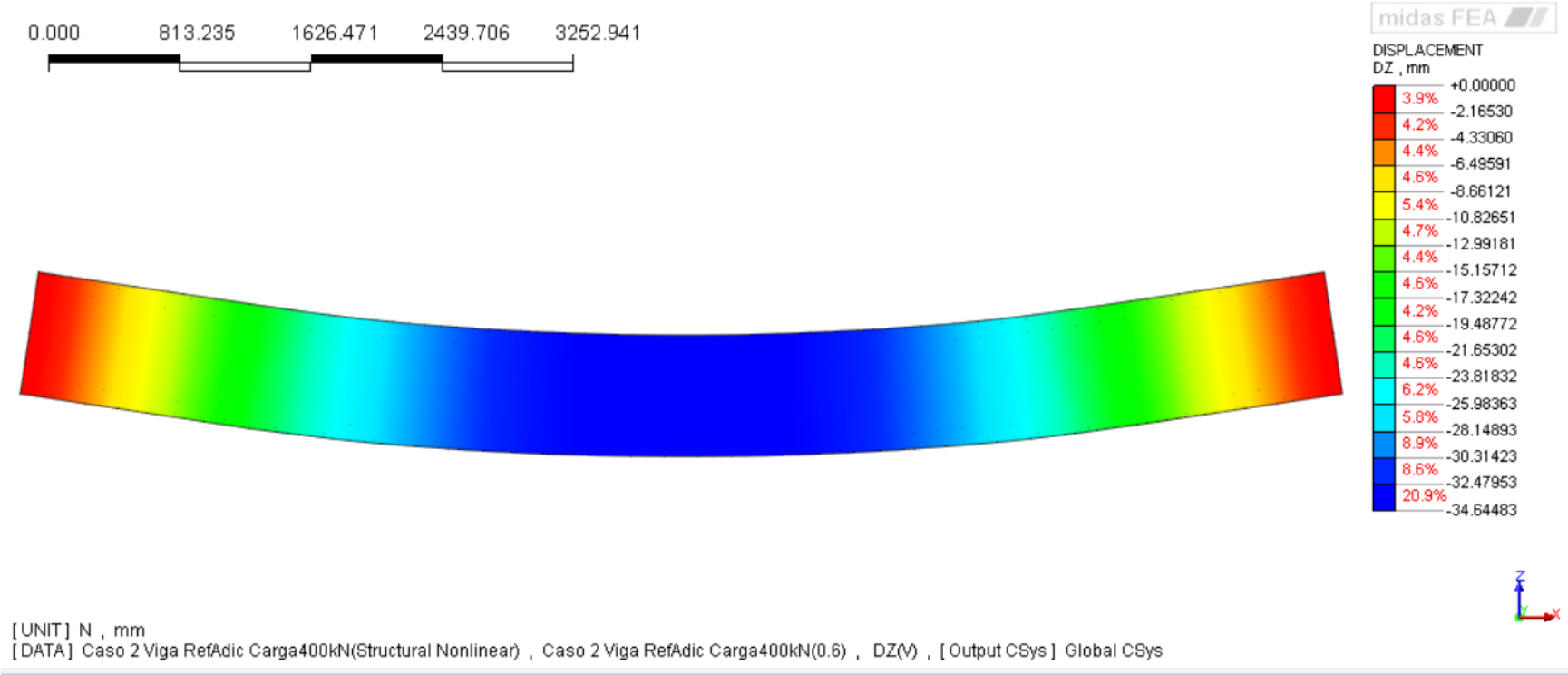
Debido a que la V3 es la que posee la rigidez fisurada mas alta de las 3 vigas, y posee mayor cuantía de refuerzo a flexión, será entonces la que menos deformación última presente al momento de falla.

Desplazamiento Máximo a Rotura	
Elemento	Deformación
V1 Original	3.1cm
V2 Reforzada Barras	3.46cm
V3 Reforzada Chapa	1.9cm

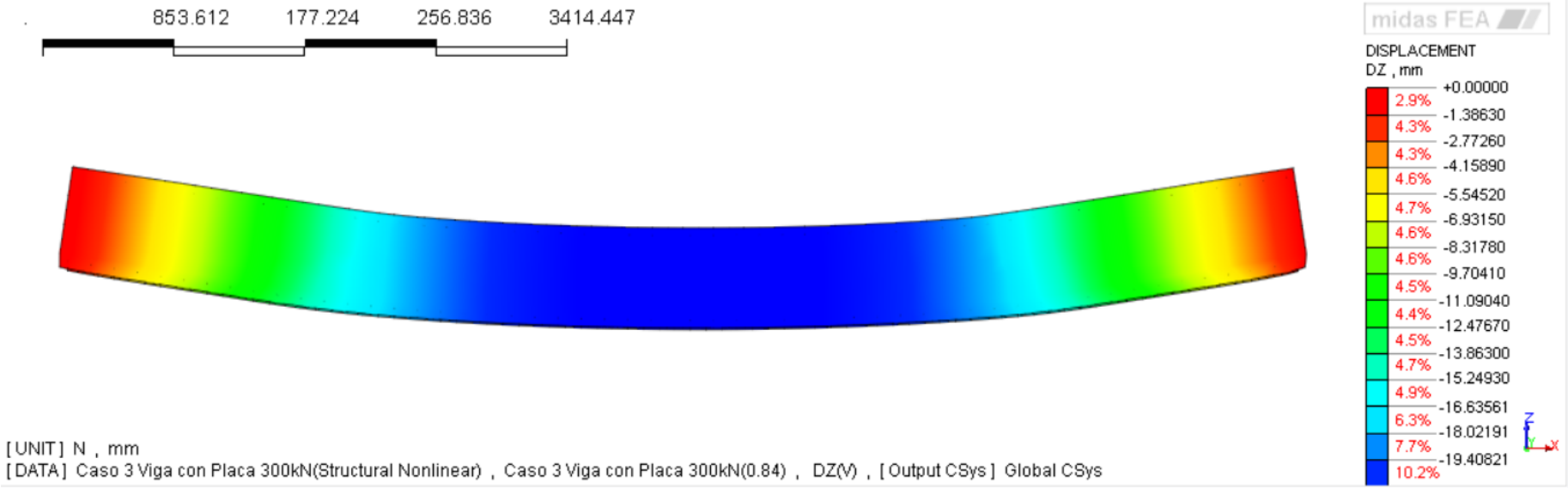
Desplazamientos: Caso 1 Viga Normal con Carga de Rotura de 200kN



Desplazamientos: Caso 2 Viga con Barras de Refuerzo Adicional Carga de Rotura de 240kN



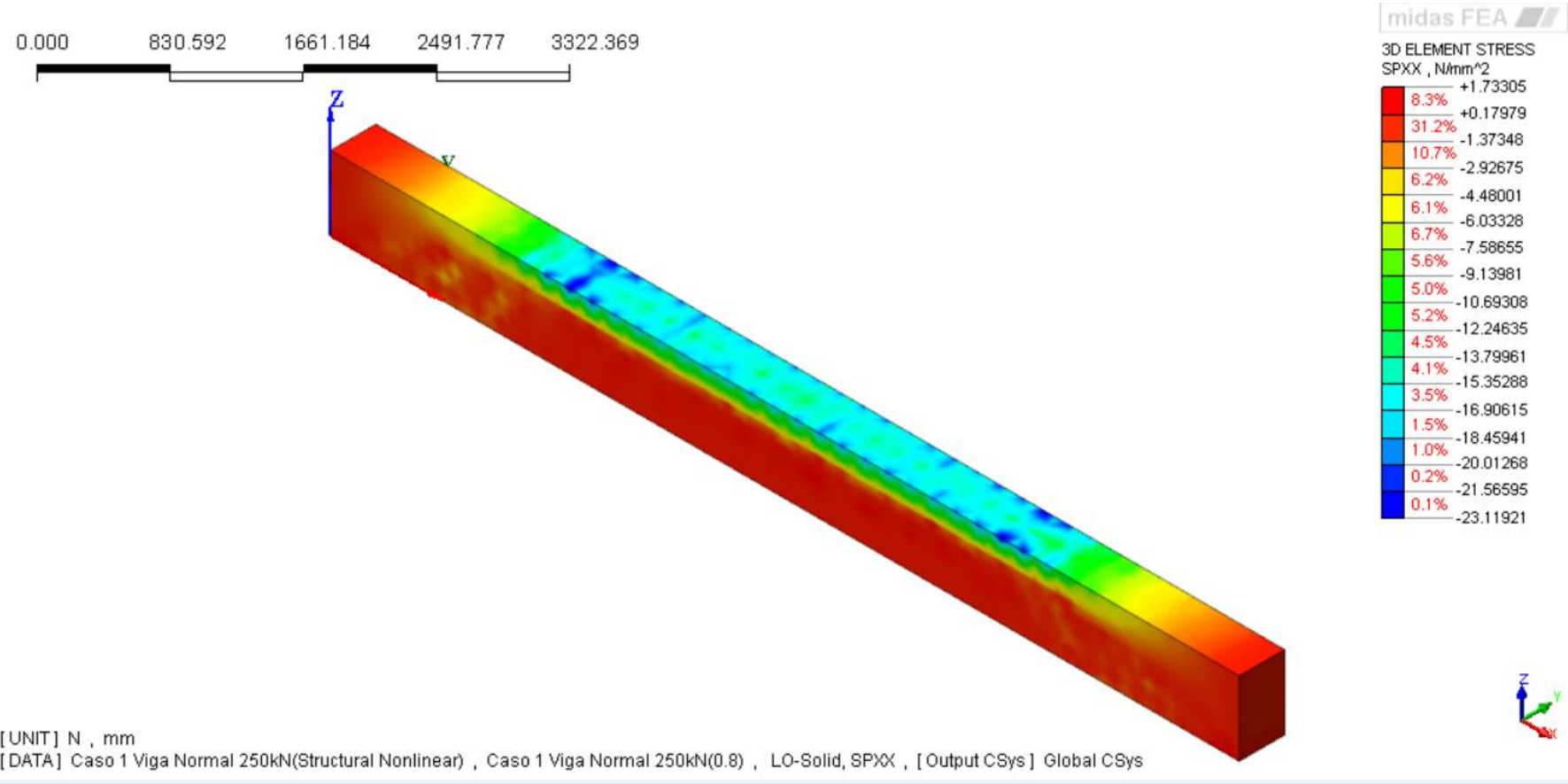
Desplazamientos: Caso 3 Viga con Refuerzo de Chapa de Acero. Carga de Rotura 252kN



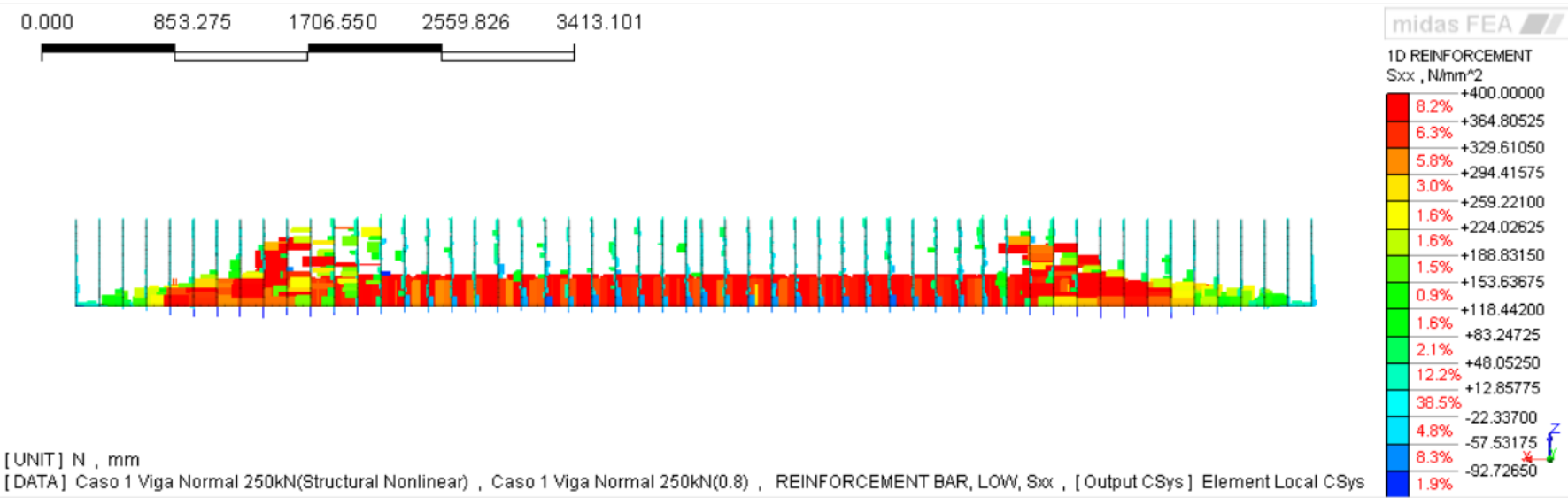
Viga 1: Caso 1 Viga Normal con Carga de Rotura 200kN

Al ocurrir la falla, tanto la armadura longitudinal, como la horizontal han plastificado. En el análisis por pasos podemos apreciar que primero plastifica el refuerzo longitudinal y luego el de cortante. Observando los patrones de fisuración podemos apreciar que la falla ocurre por cortante máximo.

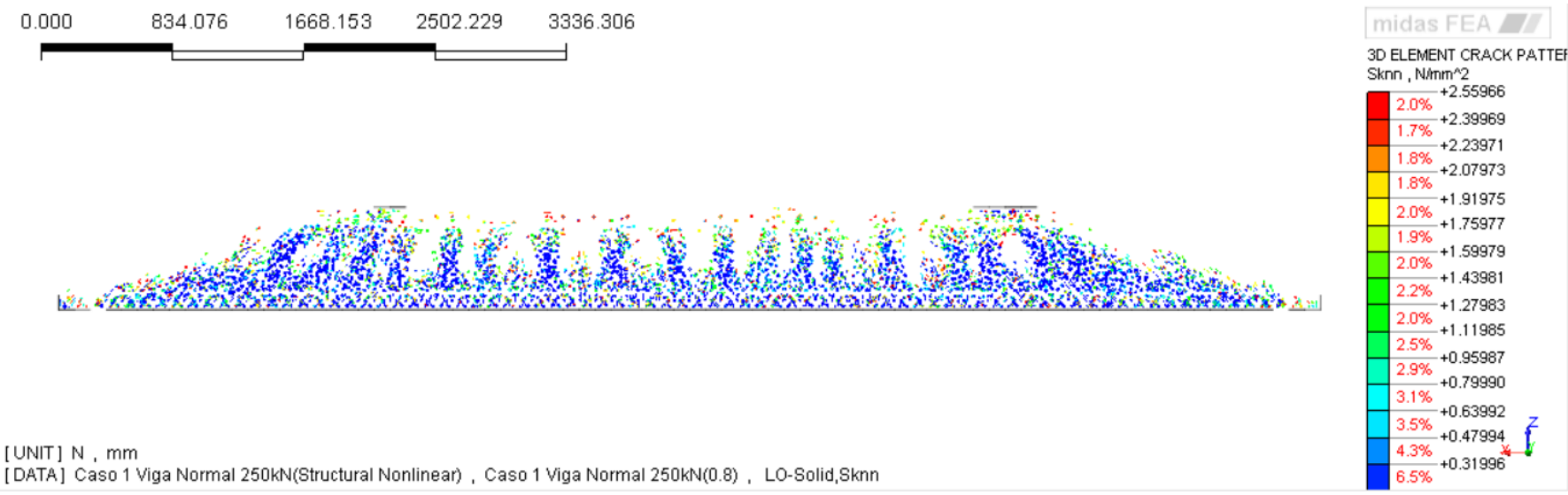
Esfuerzos en los Elementos: Caso 1 Viga Normal con Carga de Rotura de 200kN



Estado del Acero de Refuerzo: Caso 1 Viga Normal con Carga de Rotura de 200kN



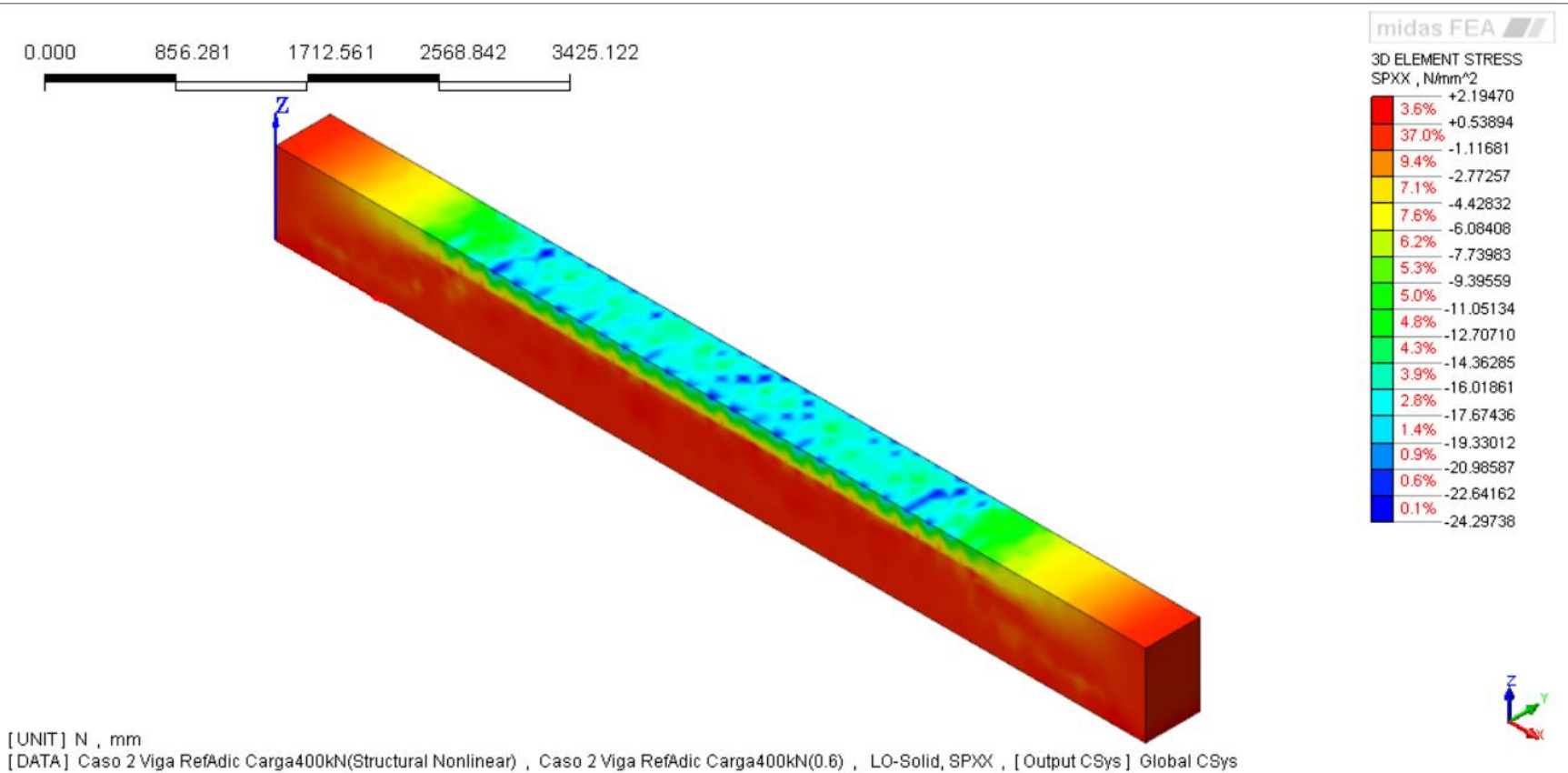
Patrones de Fisuración: Caso 1 Viga Normal con Carga de Rotura de 200kN



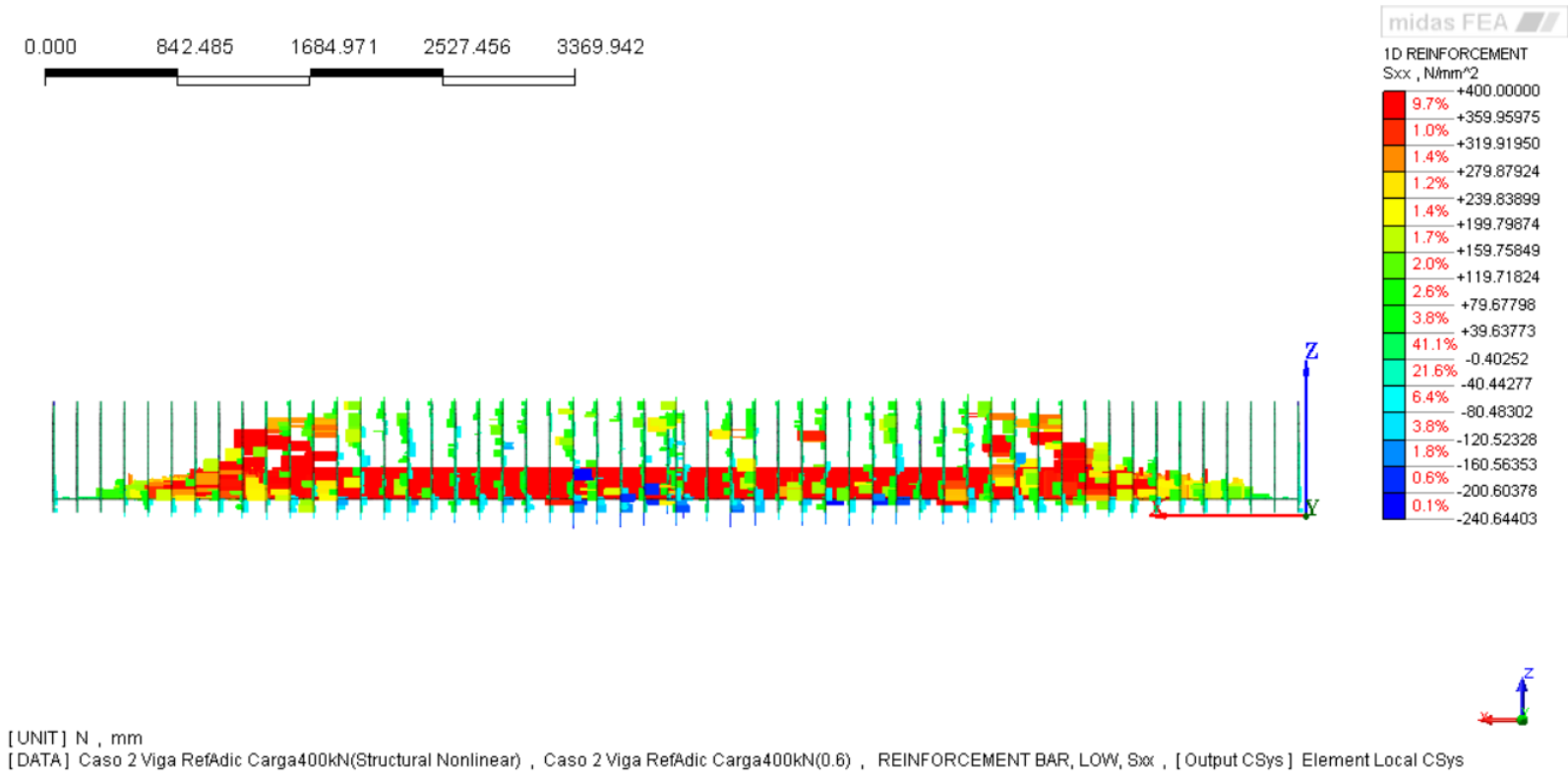
Viga 2: Viga con Barras de Refuerzo Adicional. Carga de Rotura de 333kN

Al igual que en el primer caso, al ocurrir la falla por carga máxima tanto la armadura longitudinal, como la horizontal han plastificado. Primero plastifica el refuerzo longitudinal y luego el de cortante. Observando los patrones de fisuración podemos apreciar que la falla ocurre por cortante máximo. El uso de acero de refuerzo adicional ayuda a reducir las fisuraciones en la viga.

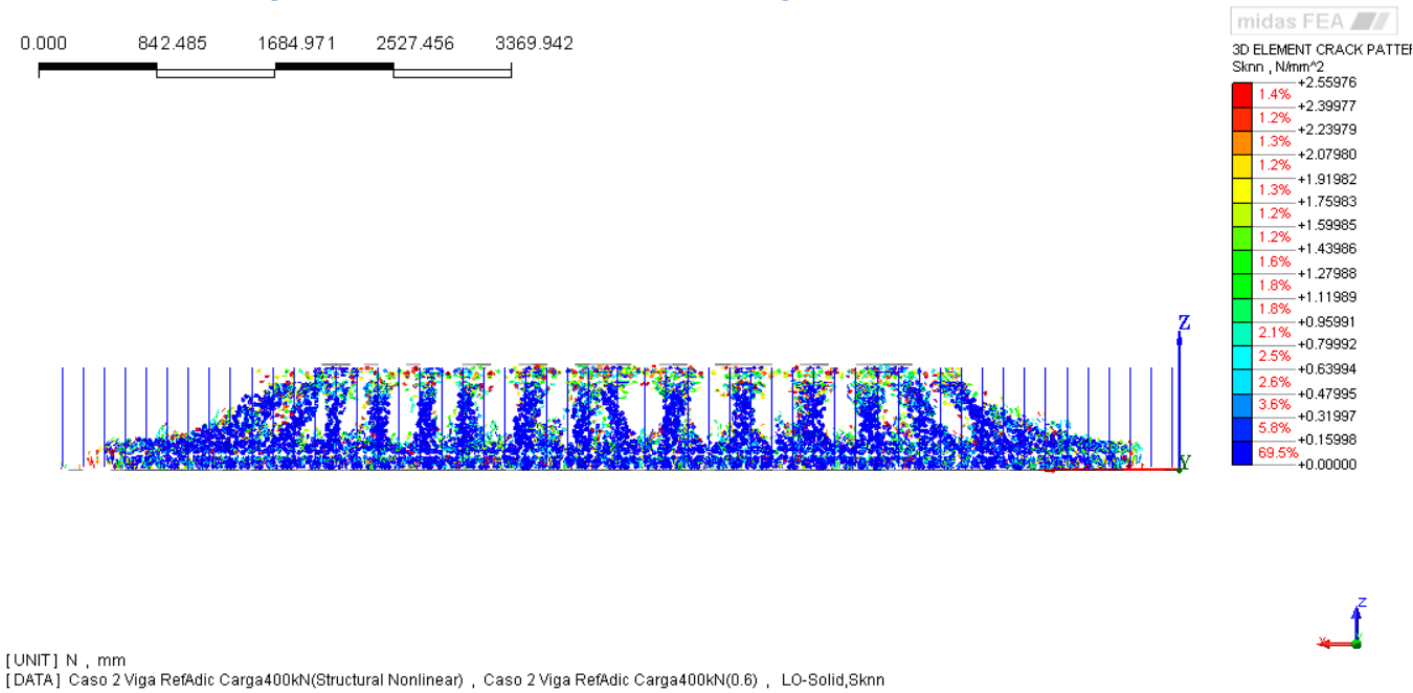
Esfuerzo en los Elementos: Caso 2 Viga con Barras de Refuerzo Adicional Carga de Rotura de 252kN



Estado del Acero de Refuerzo: Caso 2 Viga con Barras de Refuerzo Adicional Carga de Rotura de 252kN



Patrones de Fisuración: Caso 2 Viga con Barras de Refuerzo Adicional Carga de Rotura de 252kN



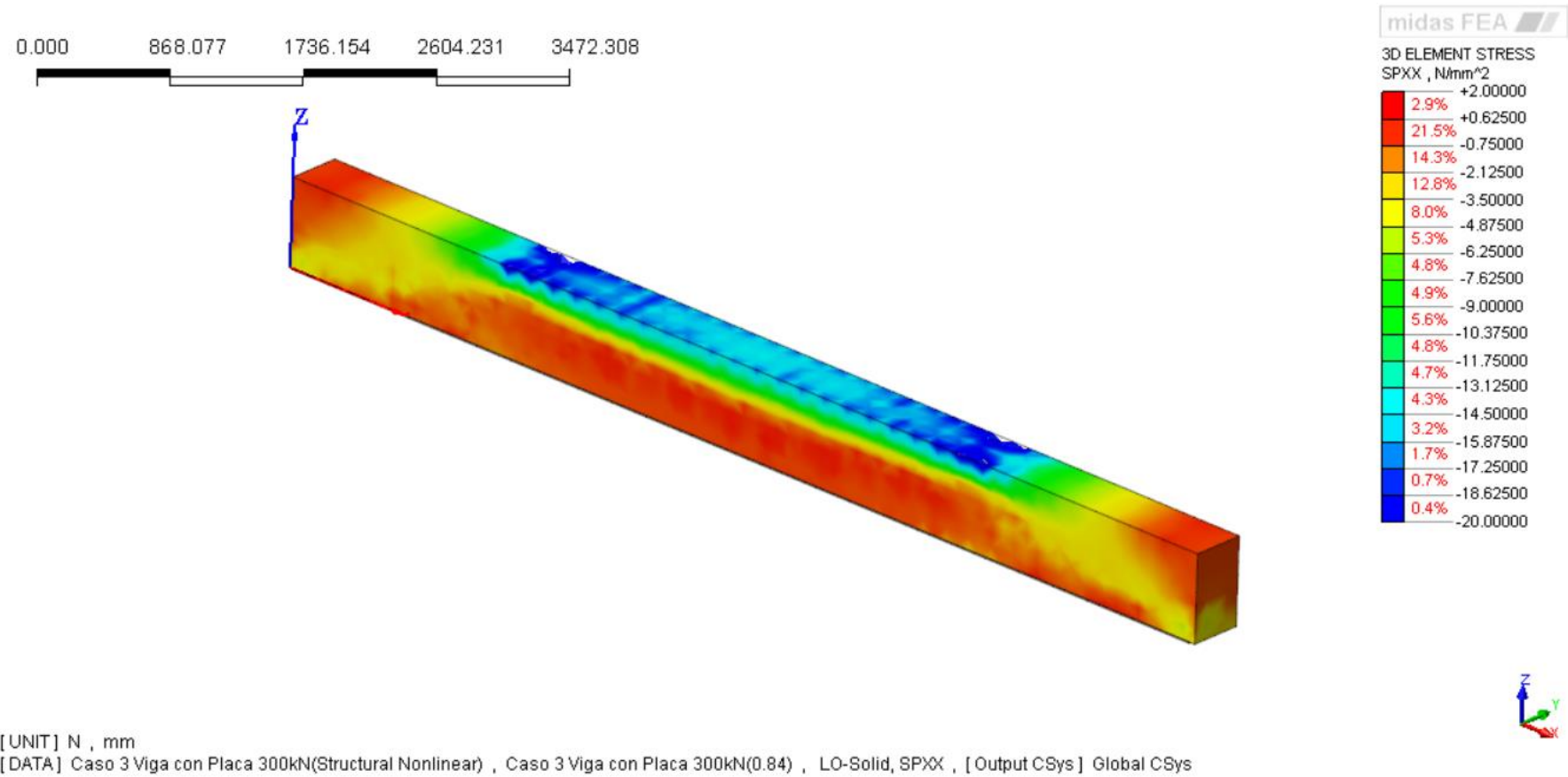


Viga 3: Viga con Refuerzo de Chapa Metálica. Carga de Rotura 252kN

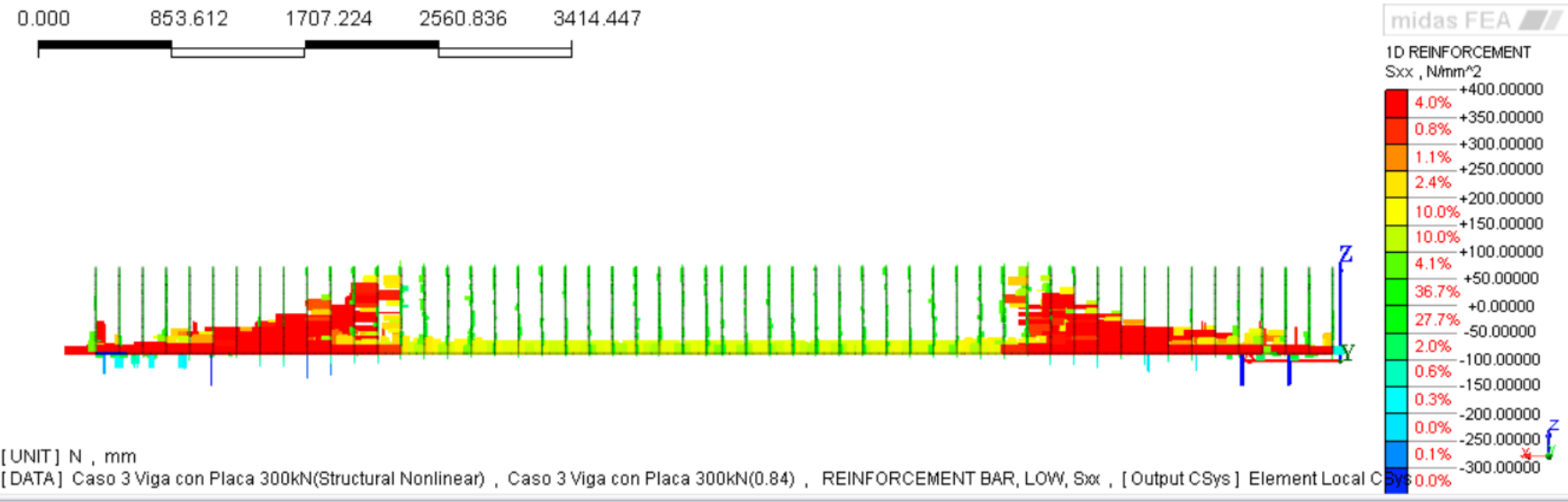
El uso de la chapa metálica provoca que la armadura longitudinal no plastifique. Esto no ocurre igual con el refuerzo de los cercos, que sí son contribuyen durante todo el proceso y plastifican al llegar a la carga última. El uso de la chapa metálica ha mejorado la capacidad a esfuerzo cortante de 200kN a 252kN, lo que significa un 26% de incremento con respecto a la viga original.

Debido al incremento en la rigidez de la viga reforzada con chapa metálica, es la que menos fisuración presenta de las tres, garantizando a la vez un bloque de compresiones en la sección más grande en comparación con las otras vigas.

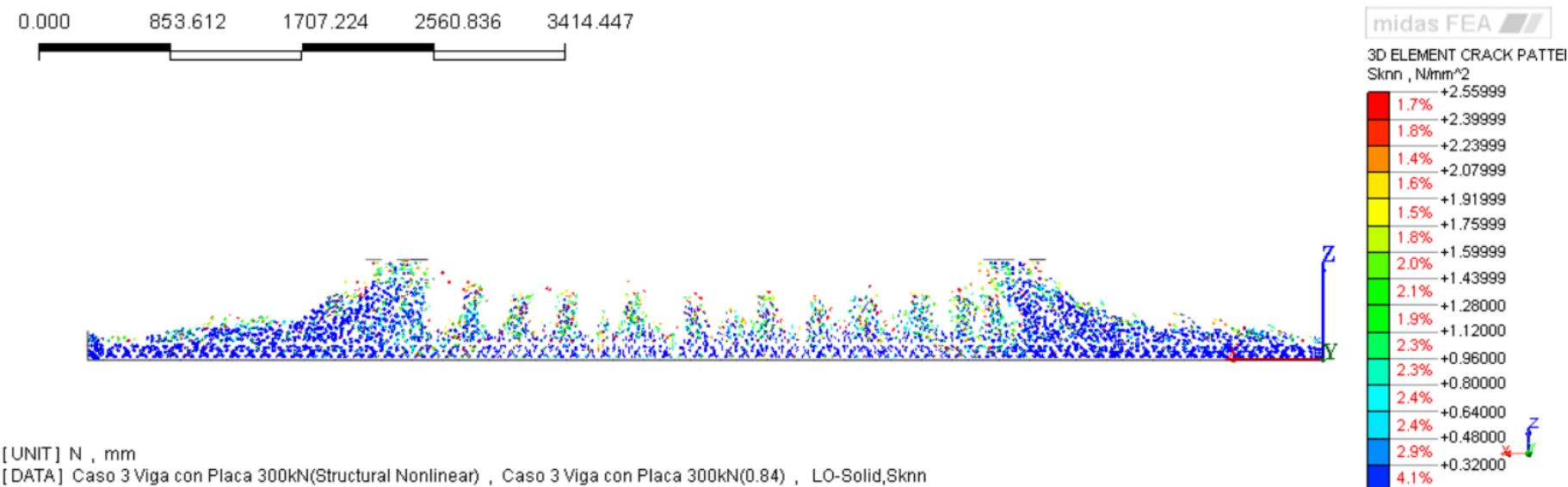
Esfuerzo en los Elementos: Caso 3 Viga con Refuerzo de Chapa de Acero. Carga de Rotura 252kN



Estado del Acero de Refuerzo: Caso 3 Viga con Refuerzo de Chapa de Acero. Carga de Rotura 252kN



Patrones de Fisuración: Caso 3 Viga con Refuerzo de Chapa de Acero. Carga de Rotura 252kN



## 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO.

### 4.1 Conclusiones generales

De acuerdo a los resultados obtenidos en los diferentes casos calculados y simulados, podemos concluir con que

1. Las diversas formulaciones existentes en las normativas para el cálculo de la resistencia a cortante en piezas de hormigón armado, proporcionan resultados en general, muy conservadores. Esto conlleva cuantías de armadura transversal más elevadas a las realmente requeridas.
2. Nuevas formulaciones como el CCM, basado en la contribución de la cabeza de compresiones como componente fundamental de la resistencia aportada por el hormigón  $V_{cu}$ , ofrecen resultados de cortante último más ajustados a la realidad experimental.
3. Ha sido posible plantear y comprobar una metodología simple de refuerzo adicional a cortante y flexión, para estructuras que por diferentes razones se ven sometidas a un cambio en sus prestaciones de servicio.

Esta metodología reconoce el incremento a la resistencia a cortante por la adición de acero de refuerzo longitudinal o de una platabanda en vigas de sección rectangular gracias a aumentar la profundidad de la fibra neutra y, por tanto, la contribución del hormigón

Nos ofrece la gran ventaja de poder reforzar una viga de hormigón armado, solo con una chapa metálica, suficientemente anclada a la cara inferior de la viga, sin necesidad de acero adicional transversal a cortante. Gracias a esto:

- Ahorramos tiempo en todo el proceso constructivo, tiempos de fraguado, controles de calidad, entre otros.
- La colocación de chapa metálica posee más facilidad de instalación, evita la necesidad de encofrados, el uso de hormigones con características específicas y cuidado especial durante todo el proceso.

Las predicciones realizadas mediante los cálculos fueron muy acertadas en relación a las simulaciones hechas por computadora. El modelo de cálculo empleado provee información importante para la comprensión de la física del problema, identificando los parámetros que participan en la resistencia a cortante del elemento viga de hormigón armado. Por ello se considera de mucha ayuda para optimizar los cálculos en diseño estructural de futuras edificaciones.

## 4.2 Recomendaciones para futuras líneas de investigación.

1. Un aspecto importante a desarrollar es la interacción entre placa banda metálica y el elemento viga de hormigón armado. En este trabajo, tanto las uniones del hormigón original con los diferentes refuerzos adicionales asumen perfecta transmisión de esfuerzos y áreas de contacto.
2. El aumento de la cuantía de armadura longitudinal mediante chapa, si bien aumenta la resistencia a flexión y a cortante, reduce la ductilidad a flexión, por lo que podría provocar un cambio de rotura, de dúctil a frágil. Por ello es necesario establecer un límite superior de la cuantía de armadura longitudinal a disponer. Este aspecto debería ser detenidamente estudiado.
3. Por otra parte, se puede plantear un sistema mixto de utilización de chapa como refuerzo longitudinal y de pernos introducidos en taladros en el alma, que aumentaría considerablemente la resistencia a cortante y a flexión. Alternativamente se podría disponer elementos en U abrazando la viga y aprovechando las aportaciones de la chapa inferior y de las chapas laterales.
4. También sería deseable extrapolar este concepto de refuerzo utilizando pretensado exterior que, además de aumentar la cuantía longitudinal, introduce un eje pero sin fragilizar la rotura.
5. Sería deseable llevar a cabo una campaña experimental de ensayos de rotura de vigas, para verificar la eficacia e interés real de estos sistemas de refuerzo adicional a cortante.



## 5. ANEJOS

Anexos sobre 3.4.1 Simulación Numérica: Midas FEA

Tablas Carga-Desplazamientos de las vigas simuladas para los distintos pasos de Carga.

Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN			
No	Step	Desplazamiento [cm]	Carga [kN]
0		0	0
1	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.05): DZ(V)	0.05713	12.5
2	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.1): DZ(V)	0.114261	25
3	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.15): DZ(V)	0.171403	37.5
4	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.2): DZ(V)	0.242933	50
5	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.25): DZ(V)	0.572009	62.5
6	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.3): DZ(V)	0.905122	75
7	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.35): DZ(V)	1.184967	87.5
8	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.4): DZ(V)	1.428839	100
9	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.45): DZ(V)	1.677509	112.5
10	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.5): DZ(V)	1.922893	125
11	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.55): DZ(V)	2.167203	137.5
12	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.6): DZ(V)	2.416036	150
13	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.65): DZ(V)	2.670387	162.5
14	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.7): DZ(V)	2.934267	175
15	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.75): DZ(V)	3.201208	187.5
16	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.8): DZ(V)	3.539376	200
16	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.8): DZ(V)	3.877544	200
16	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.8): DZ(V)	4.215712	200
17	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.85): DZ(V)	15.783593	212.5
18	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.9): DZ(V)	26945571.88	225
19	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (0.95): DZ(V)	57068843.75	237.5
20	Caso 1: Viga V1 con Carga a 250 kN (1): DZ(V)	88931606.25	250

Caso 2: Viga con Carga a 400 kN y Resistencia de Diseño 265kN (Refuerzo Adicional)			
No	Step	Desplazamiento [cm]	Carga [kN]
0		0	0
1	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.0333333) : DZ(V)	0.034049	13.3332
2	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.0666667) : DZ(V)	0.068099	26.6668
3	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.1) : DZ(V)	0.102152	40
4	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.133333) : DZ(V)	0.13621	53.3332
5	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.166667) : DZ(V)	0.170649	66.6668
6	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.2) : DZ(V)	0.460921	80
7	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.233333) : DZ(V)	0.858995	93.3332
8	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.266667) : DZ(V)	1.129701	106.6668
9	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.3) : DZ(V)	1.38928	120
10	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.333333) : DZ(V)	1.600865	133.3332
11	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.366667) : DZ(V)	1.821896	146.6668
12	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.4) : DZ(V)	2.047999	160
13	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.433333) : DZ(V)	2.268907	173.3332
14	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.466667) : DZ(V)	2.489762	186.6668
15	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.5) : DZ(V)	2.718478	200
16	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.533333) : DZ(V)	2.96291	213.3332
17	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.566667) : DZ(V)	3.220541	226.6668
18	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.6) : DZ(V)	4.927709	240
19	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.633333) : DZ(V)	105496.4355	253.3332
20	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.666667) : DZ(V)	7533906.25	266.6668
21	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.7) : DZ(V)	16284181.25	280
22	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.733333) : DZ(V)	27571271.88	293.3332
23	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.766667) : DZ(V)	38547412.5	306.6668
24	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.8) : DZ(V)	54914293.75	320
25	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.833333) : DZ(V)	73117393.75	333.3332
25	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.833333) : DZ(V)	94096006.25	346.6668
25	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.833333) : DZ(V)	118033875	360
26	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.866667) : DZ(V)	143525437.5	373.3332
27	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.9) : DZ(V)	170312400	386.6668
28	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.933333) : DZ(V)	199155575	400
29	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(0.966667) : DZ(V)	77431850	386.6668
30	Caso 2: Viga V2 con Carga a 400 kN y Refuerzo Adicional(1) : DZ(V)	108115062.5	400

Caso 3: Viga Original con Carga 300kN y Placa , Resistencia de Diseño 266.18kN			
No	Step	Desplazamiento [cm]	Carga [kN]
0		0	0
1	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.02) : DZ(V)	0.022788	6
2	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.04) : DZ(V)	0.045576	12
3	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.06) : DZ(V)	0.068364	18
4	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.08) : DZ(V)	0.091151	24
5	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.1) : DZ(V)	0.113939	30
6	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.12) : DZ(V)	0.136727	36
7	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.14) : DZ(V)	0.159515	42
8	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.16) : DZ(V)	0.182303	48
9	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.18) : DZ(V)	0.205091	54
10	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.2) : DZ(V)	0.231255	60
11	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.22) : DZ(V)	0.260359	66
12	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.24) : DZ(V)	0.289613	72
13	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.26) : DZ(V)	0.322292	78
14	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.28) : DZ(V)	0.366239	84
15	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.3) : DZ(V)	0.410506	90
16	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.32) : DZ(V)	0.456596	96
17	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.34) : DZ(V)	0.501674	102
18	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.36) : DZ(V)	0.549245	108
19	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.38) : DZ(V)	0.59623	114
20	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.4) : DZ(V)	0.64279	120
21	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.42) : DZ(V)	0.690342	126
22	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.44) : DZ(V)	0.737921	132
23	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.46) : DZ(V)	0.783153	138
24	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.48) : DZ(V)	0.830356	144
25	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.5) : DZ(V)	0.885499	150
26	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.52) : DZ(V)	0.941683	156
27	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.54) : DZ(V)	1.001998	162
28	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.56) : DZ(V)	1.058173	168
29	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.58) : DZ(V)	1.111589	174
30	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.6) : DZ(V)	1.165336	180
31	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.62) : DZ(V)	1.224806	186
32	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.64) : DZ(V)	1.280286	192
33	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.66) : DZ(V)	1.343434	198
34	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.68) : DZ(V)	1.433223	204
35	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.7) : DZ(V)	1.507426	210
36	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.72) : DZ(V)	1.577136	216
37	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.74) : DZ(V)	1.650179	222
38	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.76) : DZ(V)	1.722725	228
39	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.78) : DZ(V)	1.797272	234
40	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.8) : DZ(V)	1.88057	240
41	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.82) : DZ(V)	1.98214	246
42	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.84) : DZ(V)	2.21169	252
43	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.86) : DZ(V)	492.209101	258
44	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.88) : DZ(V)	2577.518463	264
45	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.9) : DZ(V)	3850.104904	270
46	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.92) : DZ(V)	9026.010132	276
47	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.94) : DZ(V)	13477.36664	282
48	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.96) : DZ(V)	22961.05804	288
49	Caso 3 Viga Normal 300kN(0.98) : DZ(V)	41425.79651	294
50	Caso 3 Viga Normal 300kN(1) : DZ(V)	63809.00879	300

## 6. BIBLIOGRAFÍA

---

- <sup>1</sup> Collins, M.P., Bentz, E.C., and Sherwood, E.G., "Where is Shear Reinforcement Required? Review of Research Results and Design Procedures", *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No.5, Sept.-Oct. 2008, pp. 590-600.
- <sup>2</sup> James M. Gere & Barry J. Goodno, "Mecánica de Materiales, 7ma Edic." 2009. Esfuerzo cortante y deformación unitaria a cortante pg. 32.
- <sup>3</sup> ASCE-ACI-Committee-445, "Recent approaches to shear design of structural concrete," *Journal of Structural Engineering*, pp. 1375–1417, 1998.
- <sup>4</sup> James Wight & James G. MACGREGOR "Reinforced Concrete: Mechanics & Design 6E" Pearson 2012. Pg. 255.
- <sup>5</sup> K. Reineck, "Ultimate shear force of structural concrete members without transverse reinforcement derived from a mechanical model," *ACI Structural Journal*, vol. 88, pp. 592–602, 1991.
- <sup>6</sup> J. Warlaven, "Fundamental analysis of aggregate interlock," *Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE*, pp. 2245–2270, 1981.
- <sup>7</sup> R. Fenwick and T. Paulay, "Mechanisms of shear resistance of concrete beams," *Journal of the Structural Division*, vol. 94, pp. 2325–2350, 1968.
- <sup>8</sup> M. Kani, M. Huggins, and R. Wittkopp, Kani on Shear in Reinforced Concrete. Dept. of Civil Engineering, University of Toronto, 1979.
- <sup>9</sup> H. Taylor, "Investigation of the forces carried across cracks in reinforced concrete beams in shear by interlock of aggregate," Tech. Rep. 42.447, Cement and Concrete Association, 52 Grosvenor Gardens London SW1, 1970.
- <sup>10</sup> F. Vecchio and M. Collins, "The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear," *ACI J.*, vol. 83, no. 2, pp. 219–231, 1986.
- <sup>11</sup> M. P. Collins and D. Mitchell, *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall. Canada Inc., 1991. 2.1.2, 7.2.2
- <sup>12</sup> V. Gopalaratnam and S. Shah, "Softening response of plain concrete in direct tension," in *ACI Journal Proceedings*, vol. 82, ACI, 1985. (document), 2.1.2, 2.8
- <sup>13</sup> R. Park, T. Paulay, and S. Everest, *Estructuras de hormigón reforzado*. Editorial Limusa, 1978.
- <sup>14</sup> C. G. Nogueira, W. S. Venturini, and H. B. Coda, "Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures considering the influence of shear strength complementary mechanisms," *Lat. Am. J. Solids Struct.*, vol. 10, no. 5, pp. 953–980, 2013.
- <sup>15</sup> T. Paulay, R. Park, and M. Phillips, "Horizontal construction joints in cast-in-place reinforced concrete," *ACI Special Publication SP-42: Shear in Reinforced Concrete*, vol. 2, pp. 599–611, 1974.
- <sup>16</sup> W. Krefeld and C. Thurston, "Contribution of longitudinal steel to shear resistance of reinforced concrete beams," in *ACI Journal Proceedings*, vol. 63, pp. 325–344, ACI, 1966.
- <sup>17</sup> H. Taylor, "The fundamental behavior of reinforced concrete beams in bending and shear," *ACI Special Publication SP-42: Shear in Reinforced Concrete Special Publication 42*, pp. 43–78, 1974.

- 
- <sup>18</sup> E. N. Vintzileou and T. P. Tassios, "Mathematical models for dowel action under monotonic and cyclic conditions," *Magazine of Concrete Research*, vol. 38, pp. 13–22, March 1986.
- <sup>19</sup> M. Collins and D. Mitchell, *Prestressed concrete structures*. Prentice Hall (Englewood Cliffs, NJ), 1991.
- <sup>20</sup> A. Muttoni, "Schubfestigkeit und durchstanzen von platten ohne querkraftbewehrung," *Beton-und Stahlbetonbau*, vol. 98, no. 2, pp. 74–84, 2003.
- <sup>21</sup> F. Leonhardt, E. Monning, C. Lesser, and E. Fliess, *Estructuras de hormigón armado*. Libreria-Ed. El Ateneo, 1985.
- <sup>22</sup> ACI-Committee-318, *Building Code Requirements of Structural Concrete and Commentary*. 2008. ACI, 2008.
- <sup>23</sup> A. Cladera, *Shear design of reinforced high-strength concrete beams*. PhD thesis, UPC, 2002.
- <sup>24</sup> ASCE-ACI-Committee-426, "The shear strength of reinforced concrete members," *Journal of Structural Engineering*, pp. 1091–1187, 1973.
- <sup>25</sup> R. Elstner and E. Hognestad, "Laboratory investigation of rigid frame failure," in *ACI Journal Proceedings*, vol. 53, ACI, 1957.
- <sup>26</sup> B. Anderson, "Rigid frame failures," in *ACI Journal Proceedings*, vol. 53, ACI, 1957.
- <sup>27</sup> T. Shioya, M. Iguro, Y. Nojimiri, H. Akiyama, and T. Okada, "Shear strength of large reinforced concrete beams," *Fracture mechanics: Application to concrete*, vol. SP-118, pp. 259–281, 1989.
- <sup>28</sup> M. Collins, E. Bentz, E. Sherwood, and L. Xie, "An adequate theory for the shear strength of reinforced concrete structures," in *Morley Symposium on Concrete Plasticity and its Application.*, pp. 75–93, University of Cambridge, 2007.
- <sup>29</sup> H. Taylor, "Basic behaviour in shear and the model code provisions for members without shear reinforcement," *Bulletin d'Information*, no. 126, pp. 125–140, 1978.
- <sup>30</sup> fib Symposium Prague 2011, ed., *Wake-up call for creep, myth about size effect and black holes in safety: What to improve in fib model code draft*, vol. 2, 2011.
- <sup>31</sup> F. du Béton, "Shear and punching shear in rc and frc elements—workshop October 15-16, 2010, salò," *Bulletin*, vol. 57, p. 264, October 2010.
- <sup>32</sup> P. Zararis and G. Papadakis, "Diagonal shear failure and size effect in rc beams without web reinforcement," *Journal of structural engineering*, vol. 127, pp. 733–742, 2001.
- <sup>33</sup> M. Collins, F. Vecchio, R. Selby, and P. Gupta, "The failure of an offshore platform," *CONCRETE INTERNATIONAL-DETROIT*, vol. 19, pp. 28–36, 1997.
- <sup>34</sup> C. permanente del hormigón, EHE-08. *Instrucción de Hormigón Estructural*. 2008. Ministerio de Fomento, 2008.
- <sup>35</sup> *Design of Concrete Structures*. Commission of the European Communities Std., 2004.
- <sup>36</sup> O. Hedman and A. Losberg, "Design of concrete structures with regard to shear forces," *Comité Euro-International du Béton (CEB): Shear and Torsion*. *Bulletin Information*, no. 126, pp. 184–209, 1978.
- <sup>37</sup> *Código Modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural* (E-4). Traducción Española 1995 de GEHO. Colegio de Ingenieros de Caminos C. y P./GEHO/ATEP,

- 
- <sup>38</sup> G. N. J. Kani, "The riddle of shear failure and its solution," *Journal Proceedings*, vol. 61, pp. 441–468, 1964.
- <sup>39</sup> Y. Hamadi and P. Regan, "Behaviour in shear of beams with flexural cracks," *Magazine of concrete research*, vol. 32, pp. 67–77, 1980.
- <sup>40</sup> R. Swamy and S. Qureshi, "An ultimate shear strength theory for reinforced concrete t-beams without web reinforcement," *Materials and Structures*, vol. 7, no. 3, pp. 181–189, 1974.
- <sup>41</sup> M. Kotsovos, J. Bobrowski, and J. Eibl, "Behaviour of reinforced concrete t-beams in shear," *The Structural Engineer*, vol. 65B, pp. 1–10, 1987.
- <sup>42</sup> A. K. Tureyen, T. S. Wolf, and R. J. Frosch, "Shear strength of reinforced concrete t-beams without transverse reinforcement," *ACI Structural Journal*, vol. 103-S67, pp. 656–663, 2006.
- <sup>43</sup> H. Park, S. Kang, and K. Choi, "Analytical model for shear strength of ordinary and prestressed concrete beams," *Engineering Structures*, vol. 46, pp. 94–103, 2013.
- <sup>44</sup> P. Marti, "Basic tools of reinforced concrete beam design," in *ACI Journal Proceedings*, vol. 82, ACI, 1985.
- <sup>45</sup> J. Schlaich, K. Schafer, and M. Jennewein, "Toward a consistent design of structural concrete," *PCI Journal*, pp. 74–150, 1987. 2.3.3
- <sup>46</sup> K. Al-Nahlawi and J. Wight, "Beam analysis using concrete tensile strength in truss models," *ACI Structural Journal*, pp. 284–289, 1992.
- <sup>47</sup> A. García Meseguer, F. Morán Cabré, and J. C. Arroyo Portero, *Hormigón armado*.
- <sup>48</sup> A. Muttoni and J. Schwartz, "Behaviour of beams and punching in slabs without shear reinforcement," in *IABSE Colloquium*, vol. 62, pp. 703–708, 1991.
- <sup>49</sup> H. Wagner, "Ebene blechwandträger mit sehr dünnen stegblechen," *Z. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt*, vol. 20, 1929.
- <sup>50</sup> M. Collins, "Toward a rational theory for rc members in shear," *Journal Structural Division, ASCE*, vol. 104(4), pp. 649–666, 1978.
- <sup>51</sup> F. Vecchio and M. Collins, "The response of reinforced concrete to in-place shear and normal stresses," tech. rep., Dept. of Civil Engineering, University of Toronto, Pub. 82.03, 1982.
- <sup>52</sup> M. Collins and D. Michell, "Prestressed concrete basics. Canadian prestressed concrete institute, Canada, 1987," tech. rep., ISBN 0-9691816-6-3 Collins, Revised version (1991): *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA 1991, 766 pp. ISBN 0-13-691635-x. Reprinted by Response Publications, Toronto 1997, 766 p, ISBN 0-9681958-0-6, 1987.
- <sup>53</sup> F. Vecchio and M. Collins, "Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory," *ACI Structural Journal*, vol. 85, no. 3, pp. 258–268, 1988.
- <sup>54</sup> E. C. Bentz, "Sectional analysis of reinforced concrete members," Master's thesis, University of Toronto, 2000.
- <sup>55</sup> ACI Committee 445, "Recent Approaches to Shear design of Structural Concrete," *J. Struct. Eng.*, vol. 124, no. 12, pp. 1374–1417, 1998.

---

<sup>56</sup> E. Bentz, F. Vecchio, and M. Collins, "Simplified modified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements," *ACI Structural Journal*, vol. 103, no. 4, p. 614, 2006.

<sup>57</sup> A. Marí, N. Duarte, A. Cladera, J. Bairán, C. Ribas, and E. Oller, "The compression chord capacity model for the shear design and assessment of reinforced and prestressed concrete beams," *Tec. Pap.*, p. 16, 2016.

<sup>58</sup> Antonio Marí; Jesús M. Bairán; Antoni Cladera; and Eva Oller, "Shear Design and Assessment of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Based on a Mechanical Model," *Struct. Eng.*, p. 17, 2016.

<sup>59</sup> M. de F. España, *Instrucción Española de Hormigón Estructural*, 2008th-03–21st ed. Madrid, 2008.

<sup>60</sup> "The compression chord capacity model for the shear design and assessment of reinforced and prestressed concrete beams" Antonio Mari, Jesus Bairán, Carlos Ribas, Eva Oller, Noemi Duarte. "Running head: Shear design and assessment of RC and PC beams"